ریاضیات مقدماتی
از تجربه تا تجرید

محمد سبحانیان

تابستان ۱۳۹۷

سرشناسه	: سبحانیان، محمد، ۱۳۶۲ ـ
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضیات مقدماتی: از تجربه تا تجرید / مؤلف محمد سبحانیان؛ ویراستار علمی مجتبی آقایی فروشانی، زهرا کبوتری فریمانی.
مشخصات نشر	رودهن: محمد سبحانیان، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	ک، ۳۶۴ ص.: جدول و نمودار ؛ ۲۲ × ۲۹سم.
شابک	۹۷۸ – ۶۲۲ – ۰۰ – ۰۳۱۷ – ۵
وضعیت فهرست نویسی	فیپا
موضوع	ریاضیات – راهنمای آموزشی
موضوع	Mathematics – study and teaching
شناسه افزوده	مجتبی آقایی فروشانی، ۱۳۵۱ ـ
شناسه افزوده	کبوتری فریمانی، زهرا ۱۳۶۱ ـ
رده‌بندی کنگره	QA۳۷/۳/س۲۲ر۹ ۱۳۹۷
رده‌بندی دیویی	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۵۱۸۳۴۰۹

عنوان: ریاضیات مقدماتی: از تجربه تا تجرید
مؤلف: محمد سبحانیان
ویراستار علمی: مجتبی آقایی فروشانی، زهرا کبوتری فریمانی
ناشر: مؤلف
تعداد صفحات: ۳۶۴
قطع رحلی
تیراژ: ۳۰۰۰
نوب چاپ: اول
سال چاپ: ۱۳۹۷
شابک: ۹۷۸ – ۶۲۲ – ۰۰ – ۰۳۱۷ – ۵
طرح جلد: روح‌الله زارعان
چاپ چاپ و طرح امروز

تقدیم به پدر و مادرم

به پاس حمایت های بی دریغ و صبورانه شان

پیش‌گفتار

انگیزه اصلی نگارش این کتاب را دانشجویان و دانش‌آموزان باهوش و علاقه‌مندی ایجاد کردند که در ریاضیات چندان موفق نبودند. سالها ریشه این مشکل را در روش‌های تدریس و متدهای آموزش ریاضی دنبال می‌کردم و به دست‌آوردهای خویش خرسند بودم. تا اینکه با فلسفه‌علم، فلسفه ریاضی، تاریخ ریاضی و کمی علوم شناختی آشنا شدم.

با نگاهی بر تاریخ ریاضیات و فلسفه ریاضیات آموختم که ریاضیات و مفاهیم و استدلال‌های آن، مانند دیگر مفاهیم و استدلال‌های زندگی روزمره، در بستری اجتماعی شکل گرفته، اما چنان از آنِ دور شده که ارتباط گرفتن با آن برای بسیاری از دانشجویان و دانش‌آموزان دشوار است. البته با توجه به دیدگاه‌های فلسفی چون نمادگرایی و واقع‌گرایی که از آغاز قرن بیستم بر کتاب‌های آموزشی ریاضی حکم‌فرما شده‌اند، انتظار دیگری نیز نمی‌توان داشت. بیشترین نفوذ در کتاب‌های آموزشی ریاضیات دانشگاهی از آن نمادگرایی است که در آن ریاضیات صرفاً مجموعه‌ای از نمادهاست که قواعدی بر آن حاکم است. در این دیدگاه ریاضیات بیشتر به یک بازی بی‌معنا شباهت دارد و هیچ ارتباطی بین ریاضیات و زندگی روزمره وجود ندارد. به‌نظر نگارنده، برای مقابله با این مشکل باید کتاب‌های آموزشی ریاضی را با دیدگاه انسان‌گرا نوشت تا مشکلات اساسی بین تجربه و تجرید برطرف گردد و در این کتاب تلاش ما بر این امر بوده است.

به‌هرحال، در این کتاب مفاهیم ریاضی از درک شهودی و تجربیات روزمرّه دانشجویان و دانش‌آموزان دبیرستانی ساخته شده و به سمت ریاضیات مجرد پیش رفته است. علاوه‌بر ساختن مفاهیم، زبان نمادین ریاضی نیز به آرامی آموزش داده شده و کوشش نگارنده بر آن بوده تا مسیری هموار از تجربیات روزمرّهٔ دانشجویان و دانش‌آموزان دبیرستانی به سمت ریاضیات مجرد و انتزاعی امروزی فراهم آید. استدلال‌های ریاضی نیز از استدلال‌های روزمره استخراج شده‌اند و سعی نگارنده بر نزدیک کردن استدلال‌های ریاضی به استدلال‌های روزمرّه بوده است.

این کتاب به مباحث ریاضیات مقدماتی می‌پردازد و برای دانشجویان نیم‌سال اول، در رشته‌های فنی و مهندسی، حسابداری، مدیریت، علوم پایه و ... مناسب است. همچنین، برای دانش‌آموزان سالهای نهم و دهم که می‌خواهند با تقویت خود در ریاضیات پایه برای ورود به درس‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال آماده شوند، کاملا مناسب است و توصیه می‌شود.

کتاب حاضر پس از پنج سال مطالعه و نگارش مداوم، بازنگری‌های پی‌درپی و با جمع‌آوری نظرات و پیشنهادات اساتیدی چون دکتر مجتبی آقایی فروشانی، جناب آقای پرویز حسن‌پور از پیش‌کسوتان عرصه آموزش ریاضیات، و دوستانی چون دکتر زهرا کبوتری فریمانی و دکتر جواد فرخی استاد امروز آماده چاپ به‌نظر می‌رسد. برای همیشه از این عزیزان سپاسگزارم که بر بنده منت گذاشته، زحمت بازبینی کتاب حاضر را متحمل شده و بنده را از نظرات و پیشنهادات سازنده خویش بهره‌مند ساخته‌اند.

ضمن تمام تلاشی که معطوف این اثر داشته‌ام، به ناتوانی‌های خویش معترفم و چشم امیدم به نظرات و پیشنهادات اساتید و همکاران گرامی است تا به لطف ایشان و ویرایش‌های پی‌درپی، به

کتابی درخور دست یابیم.

ضمن تشکر از پدر و مادرم که در ایام تألیف این اثر پشتیبان من بوده‌اند و مریم خواهر عزیزم که همواره مشوقی پرتلاش بوده است از سرکارخانم نرگس قضاوت نیز تشکر می‌کنم که در سال اول از نگارش کتاب با تایپ بخش بزرگی از نسخه اولیه، بنده را یاری رساندند.

محمد سبحانیان

۲۹ مرداد ۱۳۹۷

مقدمه

کتاب حاضر با دیدگاه تجربه‌گرایی نوشته شده است و در واقع عبارت «از تجربه تا تجرید» در عنوان کتاب به دیدگاه تألیفی کتاب اشاره دارد. به‌هرحال بهتر است پیش از مطالعه این کتاب، کمی در مورد نگاه آن به ریاضیات مقدماتی و نحوه استفاده از آن بدانیم.

ریاضیات امروزی، تمام کاربردهایش در زندگی، در صنعت، در تجارت و ...، از مفاهیمی تشکیل شده که به‌قدری از تجربیات زندگی روزمره فاصله گرفته‌اند که درک ارتباط آنها با زندگی روزمره و تجربیات زندگی هرروزهٔ بشری بسیار سخت است. هرچند در بسیاری موارد نیز هیچ ارتباطی بین آنها وجود ندارد. اما آنچه با عنوان ریاضیات مقدماتی در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرد، از تجربیات روزمره و عادی بشر در طول تاریخ ساخته شده و تحول یافته است. با شناخت این سیر تکاملی علاوه بر درک بهتر آن می‌توانیم برای درک مفاهیم انتزاعی‌تر و حتی مفاهیمی کاملا انتزاعی آماده شویم. منظور از مفاهیم، هر آن چیزی است که در ریاضیات اسمی بخصوص دارد. به‌طور مثال، عدد، عدد طبیعی، عدد کسری، عدد گویا، جمع، ضرب، خاصیت جابجایی، معادله، نامعادله، کوچک‌تری، بزرگ‌تری، مثلثات، سینوس، کسینوس، نمودار، شیب، معادلهٔ نمودار، پارامتر، متغیر، مجهول و... هر یک نامی است که بر یک مفهوم گذاشته شده است.

ریاضیات مقدماتی و در کل ریاضیات را می‌توان بافتنی زیبا درنظر گرفت که با چهار نخ با رنگ‌های مختلف بافته می‌شود. یا به‌عبارتی می‌توان آن را نتیجه همکاری چهار عامل دانست که زمینه‌ساز رشد یکدیگرند. این چهار عامل عبارتند از:

۱ **مفاهیم ریاضی:** در آغاز، به‌صورت کاملا شهودی از تجربیات زندگی روزمره درک شده‌اند و معمولاً برای برطرف کردن نیازهای بشری ساخته شده‌اند. سپس با رشد مهارت‌های انسانی درکار با این مفاهیم و رشد استدلال‌های ایشان، برای تحولات بعدی آماده شده و رشد می‌کند.

۲ **استدلال‌های ریاضی:** استدلال کردن به‌معنای دلیل آوردن است. دلایل ما برمبنای شناخت ما از مفاهیم ارزیابی می‌شوند. فرض کنید شخصی در دادگاه، برای اثبات بی‌گناهی خود از اقدام به قتلی، دلیل می‌آورد که زمان قتل در جای دیگری بوده است. وی با مفاهیم زمان و مکان آشنایی دارد و درک کرده که در یک زمان، نمی‌توان در دو مکان متفاوت حضور داشت. بنابراین، می‌گوید من در زمان قتل در مکان قتل نبوده‌ام. البته این را نیز می‌تواند با روش‌های مختلفی اثبات کند. در ریاضیات نیز اوضاع همین‌طور است. در واقع استدلال کردن چیزی جز استفاده از مفاهیم ریاضی و ارتباط آنها با یکدیگر برای رسیدن به نتیجه‌ای خاص نیست.

در این کتاب، همان‌طور که مفاهیم ریاضی رشد کرده و پیچیده می‌شوند، استدلال‌های ارائه شده نیز رشد می‌کنند و پیچیده‌تر می‌شوند تا درک آنها برای خوانندگان ساده و راحت باشد.

۳ **زبان نمادین ریاضی:** رشد نمادگذاری در ریاضیات، همیشه به تحولاتی بزرگ و اساسی انجامیده است. اولین بار زمانی است که انسان از چوب‌خط برای ثبت شمار اشیا استفاده

می‌کند. یکی دیگر از این تحولات زمانی است که یونانیان باستان خط الفبایی را از مردم فینیقیه آموختند و برای اولین بار، رئوس چندضلعی‌ها را با استفاده از حروف الفبا نام‌گذاری کردند و این نام‌گذاری ساده منشأ تحولاتی عمیق در هندسه و حتی در فلسفهٔ جهان شد. استفاده از حروف الفبا و نام‌گذاری بر نقاط و اضلاع، به انتزاع مفاهیمی چون نقطه و خط انجامید؛ این مفاهیم در طول چند قرن رشد کرده و تحول یافته‌اند. آخرین مرحله در رشد نمادگرایی ریاضی، از قرن پانزدهم آغاز شد و تا اوایل قرن بیستم ادامه یافت. البته، نمادگذاری ریاضیات، بیشترین رشد خود را در قرون شانزدهم و هفدهم تجربه کرد که آغازگر جهشی بزرگ و اساسی در ریاضیات شد. می‌توان گفت رشد ریاضیات تا پیش از این تحول که صدها هزار سال به‌طول انجامیده، در مقابل رشد ریاضیات در چند قرن پس از این تحول، کاملا ناچیز است. هرچند این تحولات جدید برپایه آن تحولات بنیادین گذشته صورت گرفته است.

به‌هرحال امروزه زبان نمادین ریاضیات، ضمن ساده و دقیق کردن نحوهٔ بیان استدلال‌ها و روش‌های حل مسائل که به افزایش مهارت‌های استدلالی و حل مسئله می‌انجامد، موجب شکل‌گیری مفاهیم و مباحثی کاملا جدید در ریاضیات شده است که بدون ریاضیات نمادین قابل درک نیستند. به‌هرحال در این کتاب، سعی شده، استفاده از زبان نمادین ریاضیات نیز به روشی مناسب آموزش داده شود.

۴ **مهارت‌های ریاضی:** که شامل مهارت‌های مختلف در استفاده از عوامل فوق است. این مهارت‌ها ضمن پاسخ دادن به مثال‌ها و تمرینات حاصل می‌شوند. لازم به ذکر است که مطالعه اثبات‌ها نیز با رشد شیوه‌های استدلالی و درک بهتر مفاهیم ریاضی، نقش مهمی در بالابردن مهارت‌ها دارند.

یکی از مهارت‌های مهم، استفاده از خواص جبری و قضیه‌ها است که در این کتاب با سرعتی مناسب رشد کرده و به خوانندگان کمک می‌کند توانایی‌های لازم را کسب کنند.

در دیدگاه «از تجربه تا تجرید»، چهار عامل فوق از مراحل ابتدایی و به‌طور همزمان رشد کرده‌اند تا به رشد یکدیگر کمک کنند. علاوه‌براین، در سایت sobymath.ir تدریس بخش‌هایی از کتاب به‌همراه پاسخ برخی از مثال‌ها و تمرینات، به‌صورت ویدیویی در اختیار خوانندگان قرار می‌گیرد. در حاشیه صفحات کتاب نیز عباراتی برای دسته‌بندی مطالب و راهنمایی خوانندگان ارائه شده است.

تمام تلاش و توان خویش را به‌کار برده‌ام تا حس زیبا و لذت بخش یادگرفتن را به تمامی خوانندگان این کتاب هدیه کنم و مدرسان محترم را در تدریس یار و همکار باشم.

محمد سبحانیان
۲۹ مرداد ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل ۱

اعداد طبیعی

همهٔ ما کم و بیش با مطالب این فصل آشنا هستیم؛ اما در این فصل، همان مفاهیم را با نگاهی متفاوت نگریسته و ضمن آشنایی بهتر با مفاهیم ابتدایی و اولیهٔ ریاضی، با زبان نمادین ریاضی و استدلال‌های ریاضی آشنا شده و مهارت‌های اولیهٔ به‌کارگیریِ آنها را تمرین می‌کنیم.

۱.۱ اعداد طبیعی

صرفاً خواندنی ...
این توضیحات به‌ظاهر ساده، به سؤالاتی مهم، پایه‌ای و پیچیده نظیر «چیستی اعداد» پاسخ گفته‌اند.

زمانی بود که انسان‌ها اعداد را نمی‌شناختند و شمردن نمی‌دانستند. اما آنها نیز مانند برخی از حیوانات به‌صورت کاملاً چشمی و حسی و بدون هیچ شمارشی درک می‌کردند که «سه‌تا سیب» از «دوتا سیب» بیشتر است. مردم‌شناسان قبایلی را کشف کردند که کلماتی مانند «دو» یا «سه» نداشتند و برای هر یک از عبارات «دو سیب»، «دو درخت»، «دو انسان» و ... کلمه‌ای خاص به‌کار می‌بردند. جالب‌تر اینکه برخی از گروه‌های بدوی کلمه‌ای مانند «درخت» نداشته‌اند. آنها برای هر یک از عبارات «درخت آلبالو»، «درخت موز» و ... کلماتی متفاوت به‌کار می‌بردند.

کسانی که کلمه‌ای مانند «درخت» ندارند، هنوز شباهت همه درخت‌ها را درک نکرده‌اند تا آنها را در یک دسته قرار داده و با یک نام بخوانند. به‌طور مشابه، انسان‌ها زمانی که توانستند نوعی برابری بین «دو سیب» و «دو هندوانه» تشخیص دهند، کلمه‌ای مانند «دو» ساختند و مفهوم عدد متولد شد.

انسان‌ها با تشخیص شباهتی بین «دوتا سیب» و «دوتا پرتقال» برابری دو «تعداد» را درک کرده و عدد «دو» را به‌عنوان نامی بر این تعداد به‌وجود آوردند. نام‌گذاری بر اعداد، براساس نمونه‌ای خاص از آن تعداد بوده است. به‌طور مثال عدد پنج، از پنجه گرفته شده و به تعداد انگشتان پنجه اشاره دارد. در آغاز این دوران اعداد به‌صورت «یک، دو، سه» بوده‌اند و بیشتر از آن را خیلی می‌خوانده‌اند.

اولین شمارش‌ها با همین اعداد شکل گرفته و برای توسعه آن از ادبیاتی شبیه به ادبیات زیر استفاده شده است.

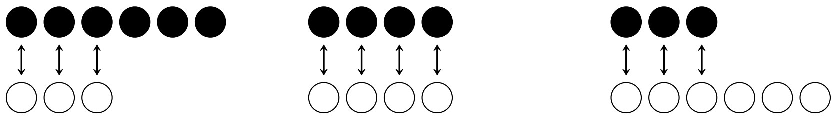
یک، دو، سه، یکی بیشتر، دوتا بیشتر، سه‌تا بیشتر، خیلی

که شباهت زیادی به اعداد زیر دارند.

یازده، دوازده، سیزده، چهارده، پانزده، شانزده، هفده، هجده، نوزده

کلمهٔ «هفت» پیش از آنکه به‌معنای امروزی به‌کار رود و یک عدد در نظر گرفته شود، به معنای «بسیار» و «غیر قابل شمارش» بوده است. عبارت‌هایی مانند «هفت کوه و هفت دریا و هفت جنگل» در ادبیات فارسی یادگار آن دوران است.

شکل زیر برابری، کمتری و بیشتری تعداد دایره‌های سیاه و دایره‌های سفید را نشان می‌دهد. به‌طور مثال، می‌گوییم در مورد (آ) از شکل زیر، دایره‌های سفید از دایره‌های سیاه بیشترند و در مورد (ب) دایره‌های سفید با دایره‌های سیاه برابرند. همچنین در مورد (ج) دایره سفید از دایره‌های سیاه کمترند.



(آ) (ب) (ج)

انسان‌ها که برابری را بدین ترتیب درک کرده بودند، در ابتدا از سنگ‌ریزه برای نگهداری شمار دام‌های خویش بهره بردند و سپس به‌ازای هر دام، علامتی (خطی) بر چوب، سنگ یا لوحی گلی حک کردند و بدین‌ترتیب، چوب‌خط به‌وجود آمد. چوب‌خط که وسیله‌ای برای شمارش اشیاء بود، امکان توسعهٔ نامگذاری بر شمار اشیا را نیز فراهم کرد. به طور مثال گروهی را درنظر بگیریم که بر هر چوب، دَه خط (علامت) می‌گذارند. در این‌صورت، می‌توانند از عبارات زیر برای شمارش اشیا استفاده کنند:

یک‌خط، دو خط، سه‌خط، ...، هشت‌خط، نُه‌خط، **چوب‌خط**،
یک‌خط بیشتر، دوخط بیشتر، سه‌خط بیشتر، ....، نُه‌خط بیشتر، دو چوب‌خط،
دوچوب و یک‌خط، دوچوب و دوخط، دوچوب و سه‌خط، .... و سه چوب‌خط

می‌توان با رسیدن به ۱۰ چوب، آنها را با طناب به هم بسته و عبارتی مانند «دو طناب و پنج چوب و هفت‌خط» را به‌معنای ۲۵۷ در ادبیات امروزی به‌کار برد. بدین‌ترتیب، اعداد که پیش از این نام‌هایی بر تعدادهای برابر بودند، به‌عنوان وسیله‌ای برای شمارش اشیاء به‌کار رفتند. به‌عبارت دقیق‌تر، از این دوران به بعد، اعداد کلماتی هستند که از پیِ هم می‌آیند و از آنها برای شمارش اشیا استفاده می‌شود.

تا قرن ششم میلادی عددی مانند «صفر» وجود نداشت و برای اولین بار هندیان از نمادی به‌عنوان جانگهدار در عددنویسی استفاده کردند که نشان می‌داد اینجا رقمی وجود ندارد و در ادامه با ترجمه کارهای هندیان به عربی، توسط ریاضیدانان ایرانی و مسلمان، برای اولین بار به‌عنوان عدد به‌کار رفت و بدین‌ترتیب، عدد «صفر» به‌وجود آمد. با ترجمهٔ آثار ریاضیدانان عربی‌نویس، صفر به‌عنوان یک عدد به اروپا رفته و همه‌گیر شد.

نکته‌ای ظریف...

در ادبیات دبیرستانی معمولاً، کلماتی که یکی پس از دیگری آمده و برای شمارش اشیا استفاده می‌شوند را اعداد طبیعی گفته و با اضافه نمودن صفر به آنها «اعداد حسابی» را می‌سازند. اما در این کتاب، هماهنگ با کتاب‌های دانشگاهی، صفر را عددی طبیعی درنظر می‌گیریم.

بنابراین، اعداد طبیعی[۱] که با $\mathbb{N}$ نمایش داده می‌شوند، شامل صفر بوده و هر عدد طبیعی نیز عددی (کلمه‌ای) است که پس از عدد طبیعی دیگری می‌آید. بدین‌ترتیب، اعداد طبیعی که با نام‌گذاری بر تعدادهای برابر، وسیله‌ای برای بیان شمار اشیا می‌ساختند، تبدیل به کلماتی شدن که برای شمارش اشیا به‌کار می‌روند.

«شمارش» از تعداد اشیاء فراتر رفته و به کمیت‌سازی انجامیده است. اولین و ابتدایی‌ترین تلاش بشر برای شمارش‌پذیر ساختن یک طول را می‌توان در عباراتی مانند «سه‌وجب»، «چهار انگشت» و «دو قدم» مشاهده نمود. در عبارت «۳ وجب» طولی براساس طولی دیگر بیان می‌شود و آن را شمارش‌پذیر می‌سازد.

ویژگی‌های شمارش‌پذیر را «کمیت» گوییم.

[۱] Natural Numbers

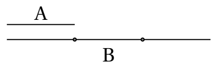
بنابراین طول یک کمیت است. «تعداد اشیا» شمارش‌پذیر است، درنتیجه «تعداد» یک کمیت است. عباراتی مانند «سه سطل آب»، «چهار کاسه گندم» و ... نشان می‌دهند گنجایش ظروف شمارش‌پذیرند و می‌توان گنجایش را به‌عنوان یک کمیت درنظر گرفت؛ این کمیت را «حجم» می‌نامیم. عباراتی مانند «سه کیلوگرم»، «پنج گرم» و «دو مثقال» نشان از شمارش‌پذیر بودن وزن اجسام براساس وزن اجسام دیگر دارد، پس وزن نیز یک کمیت است.

به تلاش و فرآیندی که به شمارش‌پذیر شدن یک ویژگی می‌انجامد، کمیت‌سازی گوییم. با شناخت بیشتر انسان‌ها از جهان پیرامونشان، توانایی ایشان در شمارش‌پذیر ساختن ویژگی‌ها و بیان آنها براساس اعداد افزایش یافت. بدین ترتیب در طول تاریخ، نخست کمیت‌های ساده‌ای مانند تعداد، طول، وزن، حجم زمان، و مساحت به‌وجود آمدند و سپس کمیت‌های پیچیده‌ای مانند دما، نیرو، بار الکتریکی، جرم، چگالی، سرعت، شتاب و ... ساخته شدند.

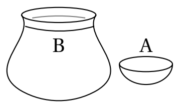
صرفاً جهت اطلاع.
نکاتی از تاریخ ریاضیات.

امروزه ریاضیات را با نمادها و علائم می‌شناسند. اما زمانی هیچ اثری از این نمادها و علائم نبود و تمام ریاضیات را بدون علائم اختصاری یا نمادها، صرفاً به نثر می‌نوشتند. این مرحله از تاریخِ نمادگذاریِ ریاضی را ریاضیات **لفظی** (یا بیانی) می‌نامیم. مرحلهٔ دوم، ریاضیاتِ **تلخیصی** است که در آن فقط برای اَعمال و کمیت‌هایی که زیاد تکرار می‌شده‌اند، علائم اختصاری درنظر می‌گرفته‌اند. اولین نمونه از این نمادگذاری را می‌توان در پاپیروسِ «رایند[1]» مربوط به مصریان باستان مشاهده نمود. اما پس از آن تا قرن پانزدهم میلادی اثری از نمادگذاری در ریاضیات دیده نمی‌شود. در نیمهٔ اول قرن شانزدهم خلاصه‌نویسی‌ها، استفاده از نمادهای جمع و تفریق و حتی تساوی رواج یافت و از نیمهٔ دوم قرن شانزدهم مرحلهٔ سوم در نمادگذاری ریاضی آغاز شد که آن را «**ریاضیات نمادین**» می‌نامیم و تا اوایل قرن هجدهم، رشد قابل ملاحظه‌ای یافت. در ادامه این روند، برخی از ریاضیدانان، در سال‌های ابتدایی قرن بیستم، ریاضیات را صرفاً بازی با نمادها، و منطق را قواعد این بازی می‌دانستند.

در سال ۱۵۵۷ میلادی، «رابرت رکورد»[2] دو پاره‌خط موازی را برای تساوی معرفی کرد (به شکلی که امروزه به کار می‌بریم) که از اولین گامهای مؤثر در ورود به ریاضیات نمادین است.



اگر A را نمادی برای سیب در نظر بگیریم، می‌توان عبارت ۱A را به‌معنای «یک سیب» و ۳A را به‌معنای «سه سیب» به کار برد. اگر A را به‌نماد طول پاره‌خط بالایی و B را به نماد طول پاره‌خط پایینی در شکل مقابل درنظر بگیریم، آنگاه داریم B = ۳A.



به‌طور مشابه اگر دیگی به‌اندازه ۷ کاسه گنجایش داشته باشد، می‌توان نمادهای A و B را به ترتیب برای «گنجایش کاسه» و «گنجایش دیگ» در نظر گرفت که دراین‌صورت داریم B = ۷A.

نکته‌ای ظریف...

واضح است که اگر A نمادی برای گنجایش دیگ باشد و B نمادی برای قد یک نفر، عباراتی مانند B = A، B = ۳A و ... بی‌معنا هستند؛ چون مقادیر A و B از دو کمیت گنجایش و طول بوده و به مقادیری از یک کمیت اشاره ندارند.

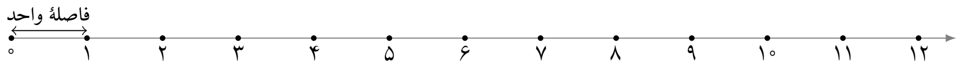
گزاره ۱.۱: اگر A و B دو مقدار از یک جنس (از یک کمیت) باشند، گوییم:
مقدار A، مقدار B را می‌شمارد اگر عددی طبیعی مانند n باشد که $B = nA$.

در دوران گذشته، روش‌هایی تجربی برای بیان طول‌ها وجود داشته است. به‌طور مثال فاصلهٔ دو شهر را با عباراتی مانند «دو روز راه است» بیان می‌کردند که به مسافتی اشاره دارد که با پای پیاده، در دو روز می‌توان طی کرد. بابلیان باستان که از اولین تمدن‌های بشری هستند، واحدی برای بیان مسافت شهرها داشته‌اند که در روز ۱۲تا از آنها پیموده می‌شود و احتمالا بر تقسیم روز به ۱۲ ساعت

---
[1] Rind
[2] Robert Record (1510 - 1558; UK)

و درنتیجه تقسیم شبانه‌روز به ۲۴ ساعت تأثیر داشته است. در فصل‌های بعد خواهیم دید که علاوه‌بر تقسیم شبانه‌روز به ۲۴ ساعت، دقیقه، ثانیه و درجه نیز از بابلیان باستان به یادگار مانده‌اند.

از دوران باستان، برای بیان مسافت‌هایی مانند اضلاع زمین‌های زراعی، از قدم کردن استفاده می‌شد که امروزه نیز کاربرد دارد. با قدم زدن بر یک خط راست و شمارش گام‌ها، محور اعداد طبیعی به‌وجود می‌آید.

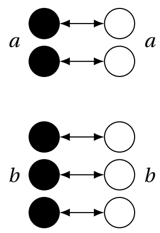


محور اعداد طبیعی، یک «نیم‌خط»[1] است. عدد صفر را به نقطهٔ ابتدای محور اختصاص داده و فاصله‌ای به‌عنوان «فاصلهٔ واحد» (طول گام) در نظر می‌گیریم. نقطه‌ای که به فاصلهٔ واحد از صفر قرار دارد را نقطهٔ بعد از صفر گفته و عدد بعد از صفر، یعنی «یک» را به آن اختصاص می‌دهیم. با ادامهٔ این روند، نقاط دیگری بر این خط مشخص می‌شوند که فاصلهٔ هر یک از نقطهٔ قبلی‌اَش، به‌اندازهٔ «فاصلهٔ واحد» است. بنابراین، نقطه‌ای که عدد ۵ به آن نسبت داده شده، پنجمین نقطه بعد از صفر، و فاصلهٔ آن از مبدأ نیز، پنج‌برابرِ فاصلهٔ واحد است.

۱.۱.۱ جمع اعداد طبیعی

مبتدی - ضروری

اگر به ۳ سیب، ۲ سیب اضافه کنیم، گوییم «۳ سیب بعلاوهٔ ۲ سیب شده است» که برابر است با ۵سیب. به‌طور مشابه ۳پرتقال بعلاوهٔ ۲پرتقال نیز برابر است با ۵پرتقال. در شکل مقابل می‌بینیم که برای هر دو چیزی مثل دایره‌های سیاه و سفید می‌توان تعداد کل دایره‌های سیاه را با افزودن دایره‌های سیاه بالایی به پایینی محاسبه نمود که برابر است با ۳دایرهٔ سیاه بعلاوهٔ ۲ دایرهٔ سیاه و به‌طور مشابه تعداد کل دایره‌های سفید نیز برابر است با ۳دایرهٔ سفید بعلاوهٔ ۲ دایرهٔ سفید. اما از آنجا که دایره‌های سفید بالایی و دایره‌های سیاه بالایی هم‌تعداد هستند، پس در تناظرند و همچنین دایره‌های سفید پایینی و دایره‌های سیاه پایینی نیز با هم در تناظرند و درنتیجه کل دایره‌های سیاه با کل دایره‌های سفید در تناظر است و درنتیجه تعداد برابر دارند.



به‌طور مشابه، برای هر چیز دیگری مانند درخت، انسان، اسب و ... نیز حاصل ۳چیز بعلاوهٔ ۲چیز با تعداد دایره‌های سیاه برابر است. بنابراین، چون تعداد دایره‌های سیاه برابر است با ۵، پس برای هر چیزی تعداد ۳چیز بعلاوهٔ ۲چیز برابر است با ۵ چیز. بنابراین، می‌توانیم به اختصار بگوییم ۳ بعلاوهٔ ۲ برابر است با ۵؛ یعنی برای هر چیزی، ۳تا از آن بعلاوهٔ ۲تا از آن برابر است با ۵تا از آن.

عبارت ۳ بعلاوهٔ ۲ را به‌صورت ۲ + ۳ می‌نویسیم. علامت + را اولین بار گیل‌فاندرهوکه [2] در قرن شانزدهم به‌کار برد؛ هر چند پیش از وی، در قرن پانزدهم، اورسم علامتی شبیه به +، احتمالا از روی کلمهٔ *et* به‌معنای «وَ» ساخت که در عباراتی مانند «سه و چهار» برای بیان جمع به‌کار می‌رفت. البته پیش از اورسم، مصریان باستان نیز علامتی برای جمع داشته‌اند، اما پس از ایشان تا قرن پانزدهم، هیچ نمادی برای جمع وجود نداشت.

برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، عبارت «a بعلاوهٔ b» را به‌صورت $a+b$ می‌نویسیم که به تعداد «aچیز بعلاوهٔ b چیز» اشاره دارد.

اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، $a+b$، تعداد اشیای حاصل از اضافه نمودن b شیء به a شیء است و به نماد +، «عملگر جمع» گفته می‌شود.

[1] خطی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر امتداد دارد. خطی که ابتدا دارد اما انتها ندارد.
[2] Giel Vander Hoecke

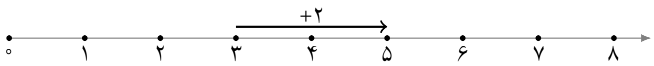
به‌طور مثال اگر a را به‌معنای ۶ و b را به‌معنای ۳ درنظر بگیریم، برای محاسبهٔ $a+b$ که به‌معنای $۶+۳$ است، چون ۶سیب بعلاوهٔ ۳ سیب برابر است با ۹ سیب، پس $۶+۳=۹$.

مثال ۱.۱: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

آ. $۵+۱$ ب. $۱+۵$ ج. $۵+۰$ د. $۰+۵$

پاسخ: با توجه به تعریف و درک شهودی واضح است. ■

جمع اعداد طبیعی می‌تواند برای هر دو مقدار از هر کمیتی نیز مورد استفاده قرار گیرد. به‌طور مثال وزن دو سنگ، یکی به‌اندازهٔ ۳ کیلوگرم و دیگری به‌اندازهٔ ۲ کیلوگرم، با $۲+۳$ کیلوگرم بیان می‌شود که برابر است با ۵ کیلوگرم. همچنین اگر بر محور اعداد، از نقطهٔ ۳ که به‌اندازهٔ ۳ قدم از مبدأ فاصله دارد، ۲ قدم (۲برابر فاصلهٔ واحد) به جلو برویم، فاصلهٔ ما از مبدأ با $۳+۲$ بیان می‌شود و به‌صورت زیر بر محور اعداد قابل نمایش است که با توجه به نمودار برابر است با ۵.



به‌طورِ مشابه، حاصل $a+b$ را به‌معنای نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که با جلو رفتن از نقطهٔ a به اندازهٔ b واحد به آن می‌رسیم. نقطهٔ $a+b$ در واقع، b اُمین نقطهٔ بعد از a است.

پیشرفته – اختیاری
تا انتهای تعریف، صرفا جهت اطلاع...

البته دقیق‌تر این است که ۳تا را یکی‌یکی به ۶تا می‌افزاییم. برای اینکه به اعضای بستهٔ اول شامل ۶ شیء، اعضای بستهٔ دوم شامل ۳ شیء را بیافزاییم، یکی از بستهٔ اول برداشته و چون ۳ عددِ بعد از ۲ است، اعضای بستهٔ دوم می‌شود ۲ و با افزودن آن به بستهٔ اول، چون ۷ عدد بعد از ۶ است، اعضای بستهٔ اول می‌شود ۷. بنابراین، اگر برای هر عدد طبیعی مانند a، عدد بعد از a را با $a^\star$ نمایش دهیم، داریم $۲^\star=۳$ و $۶^\star=۷$. با این نمادگذاری، چون اعضای هر دو بسته روی هم برابر است با $۶+۳$، پس داریم:

$$۶+۳=۶+۲^\star=۶^\star+۲=۷+۲$$

با ادامهٔ این روند، می‌توانیم بنویسیم:

$$۷+۲=۷+۱^\star=۷^\star+۱=۸+۱=۸+۰^\star=۸^\star+۰=۹+۰$$

و چون $۹+۰=۹$ پس $۶+۳=۹$.

با همین استدلال می‌توانیم بگوییم برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b نیز داریم:

$$a+b^\star=a^\star+b$$

که البته برای محاسبهٔ $a+۰$ قابل استفاده نیست و باید تعریف کنیم $a+۰=a$. بنابراین، می‌توان جمع اعداد طبیعی را به‌صورت زیر تعریف کرد که خواص دیگر جمع را نیز به‌دست می‌دهد.

تعریف ۱.۱: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

$$\boldsymbol{a+b^\star=a^\star+b} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{a+۰=a}$$

در تعریف فوق، اعداد به‌عنوان نمادهایی درنظر گرفته شده‌اند که یکی پس از دیگری می‌آیند و روشی مشخص برای محاسبهٔ حاصل‌جمع آنها ارائه می‌شود که هیچ ارتباطی با درک شهودی و تعابیر این نمادها نداشته و رویکردی نمادگرایانه به اعداد و جمعِ آنها دارد.

تعریف فوق برای محاسبهٔ $۳+۷$ به محاسبهٔ $۴+۶$ رجوع می‌کند که برای محاسبهٔ آن باید به همین تعریف بازگشت. به‌همین سبب این تعریف را «بازگشتی» (Recursive) می‌خوانیم.

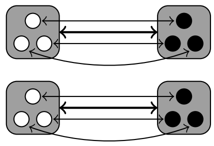
مثال ۲.۱: حاصل عبارات زیر را با استفاده از تعریف فوق به‌دست آورید.

آ. $۵+۱$ ب. $۱+۵$ ج. $۵+۰$ د. $۰+۵$

پاسخ: آ. $۵+۱=۵+۰^{\star}=۵^{\star}+۰=۶+۰=۶$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

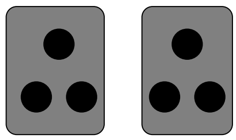
البته در این کتاب با درک شهودی جمع کار کرده و از کار با تعریف فوق، به‌علت پیچیدگی‌های تکنیکی زیاد آن، صرف نظر می‌کنیم.



ضرب: انسان‌ها فهمیدند که اگر aتا بسته bتایی سیب و aتا بسته bتایی پرتقال داشته باشند، تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها با هم برابر خواهد شد. کافی است تناظری یک‌به‌یک بین سیب‌ها و پرتقال‌ها برقرار کنیم. چون تعداد بسته‌های سیب با تعداد بسته‌های پرتقال برابر است، پس تناظری یک‌به‌یک بین آنها برقرار است. کافی است بین سیب‌های هر بسته با پرتقال‌های بستهٔ نظیر آن تناظری ایجاد کنیم که بنا به برابری تعداد سیب‌ها و پرتقال‌ها در هر بسته چنین تناظری وجود دارد. بنابراین بین سیب‌ها و پرتقال‌ها تناظری یک‌به‌یک برقرار کرده‌ایم. این استدلال را در شکل مجاور برای ۲ بسته ۳تایی دایره سیاه و ۲ بسته ۳تایی دایره سفید نشان داده‌ایم.

برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b تعداد کل اشیاء موجود در a بستهٔ bتایی را با $a\times b$ نمایش می‌دهیم و علامت $\times$ را «عملگر ضرب» می‌خوانیم.

به‌طور مثال ۳×۲ یعنی تعداد اشیای موجود در ۲ بستهٔ ۳تایی و ۲×۳ به‌معنای تعداد اشیای موجود در ۳ بستهٔ ۲تایی است.



در شکل روبه‌رو، ۲ بسته داریم که در هر بسته ۳ دایره وجود دارد. پس در کل، ۳×۲ دایره داریم. تعداد کلِّ دایره‌ها، از اضافه کردن دایره‌های یک بسته به دیگری به‌دست می‌آید که برابر است با $۳+۳$. پس $۶=۳+۳=۳\times۲$.

با تولد صفر و ورود به ریاضیات نمادین، عبارت‌هایی مانند ۰×۳ و ۳×۰ نیز ایجاد شدند که معنا و مقدار آنها مهم بود که می‌توان آنها را به‌ترتیب برای تعداد اشیاء موجود در ۳بستهٔ خالی و هیچ بستهٔ ۳تایی درنظر گرفت که به‌وضوح برابرند با صفر.

برای هر عدد طبیعی مانند a، عبارت $a\times۰$ به تعداد اشیاء موجود در aبستهٔ خالی اشاره دارد که برابر است با صفر. بنابراین، $a\times۰=۰$. به‌طور مشابه، $۰\times a$ به تعداد اشیاء موجود در هیچ بستهٔ aتایی اشاره دارد که برابر است با صفر. پس $۰\times a=۰$. پس اگر $a\neq۰$ و $b\neq۰$، آنگاه $ab\neq۰$، چون تعدادی بستهٔ غیرخالی داریم، تعداد اشیاء موجود در آنها مخالف صفر است. این مطلب را تحت عنوان گزارهٔ زیر به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۱: **اگر $ab=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$ و اگر $ab\neq۰$ آنگاه $a\neq۰$ و $b\neq۰$.**

پیشرفته - اختیاری
صرفا جهت اطلاع...

با ظهور نمادگرایی در ریاضیات، ریاضیدانان به تعاریف دقیق‌تر علاقه‌مند شدند که معمولا هیچ ارتباطی با درک شهودی ندارند. به‌طور مثال بر پایه تساوی‌های زیر که از درک شهودی نسبت به ضرب به‌دست می‌آیند، تعریفی بسیار دقیق از ضرب ارائه می‌دهند که هیچ ارتباطی با درک شهودی از ضرب

ندارد و در ادامه آمده است.

$$
\begin{aligned}
۰ \times ۳ &= ۰ && = ۰ \\
۱ \times ۳ &= ۳ = ۰ + ۳ && = (۰ \times ۳) + ۳ \\
۲ \times ۳ &= ۳ + ۳ && = (۱ \times ۳) + ۳ \\
۳ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ && = (۲ \times ۳) + ۳ \\
۴ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ + ۳ && = (۳ \times ۳) + ۳ \\
۵ \times ۳ &= ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ && = (۴ \times ۳) + ۳
\end{aligned}
$$

بنابراین، می‌توانیم ضرب اعداد طبیعی را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲.۱: **برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:**

$$\boldsymbol{۰ \times b = ۰} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{(a+۱)b = ab+b}$$

مثال ۳.۱: حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از تعریف فوق به‌دست آورید.

آ. ۰×۲ ب. ۲×۰ ج. ۲×۵

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

از آنجا که $a+۱$ عدد بعد از a است و آن را با $a^\star$ نشان می‌دادیم، می‌توانیم در تعریف فوق، به‌جای $(a+۱)$ از $a^\star$ استفاده کرده و عبارت $(a+۱)b = ab+b$ را به‌صورت $a^\star b = ab+b$ نوشت.

این تعریف دستورالعملی بازگشتی برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب، براساس جمع به‌دست می‌دهد که هرچند براساس مفاهیم جمع و ضرب ساخته شده است، اما بسیار کُند است و درگیر محاسبات طولانی می‌شود. در فصل بعد با استفاده از خواص جمع و ضرب که در ادامه می‌آیند، روش‌های محاسبهٔ سریع‌تری براساس شیوهٔ عددنویسی معمول به‌دست خواهیم آورد.

خواص جمع و ضرب را می‌توان از تعاریف فوق به‌دست آورد اما کار با این تعاریف پیچیدگی‌های تکنیکی زیادی دارد از حوصلهٔ این کتاب خارج است. لذا خواص جمع و ضرب را با استفاده از تناظر و هم‌عددی به‌دست خواهیم آورد که به درک شهودی از جمع و ضرب نیز نزدیک‌تر است.

۲.۱.۱ پرانتزگذاری و عبارت‌های محاسباتی

مبتدی – ضروری
یک‌بار خواندن، الزامی است.

پرانتز که به‌صورت «(...)» است را اولین بار شتیفل (۱۵۴۴م) و کاردانو (۱۵۴۵م) به‌کار بردند. به‌جای «سه نقطه» یک عبارت محاسباتی قرار می‌گیرد که حاصل آن قابل محاسبه بوده و در نهایت به یک عدد می‌انجامد. این عبارت را «عبارت درون پرانتز» یا به‌اختصار «درون پرانتز» می‌نامیم.

هر پرانتز، نمایندهٔ حاصل عبارت درون پرانتز است.

بنابراین، در عبارت‌های محاسباتی (قابل محاسبه)، هر پرانتز به یک عدد اشاره دارد و برای محاسبهٔ آن باید حاصل عبارت درون پرانتز را به‌جای پرانتز گذاشت. به‌طور مثال:

$$\begin{cases} (۳+۲) \times ۵ = ۵ \times ۵ = ۲۵ \\ ۳ + (۲ \times ۵) = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \end{cases}$$

به‌طور مثال عبارت $(۵ \times ۲) + ۳$ به‌معنای نتیجهٔ افزودن (۵×۲) شیء به ۳ شیء است که ۵×۲ شیء نیز به‌معنای اشیاء موجود در ۲بستهٔ ۵تایی است. بنابراین، $(۵ \times ۲) + ۳$ به‌معنای تعداد حاصل از اضافه نمودن ۲بستهٔ ۵تایی به ۳ شیء است.

اما عبارت $۵ \times (۲ + ۳)$ به‌معنای تعداد اشیاء موجود در $(۲ + ۳)$بستهٔ ۵تایی است که $(۲ + ۳)$بسته نیز به‌معنای تعداد حاصل از افزودن ۲ بسته به ۳بسته است. بنابراین، $۵ \times (۲ + ۳)$ به‌معنای تعداد اشیاء حاصل از اضافه نمود ۲بستهٔ ۵تایی به ۳بستهٔ ۵تایی است .

مثال فوق نشان می‌دهد که حاصل عبارت $۵ \times ۲ + ۳$ با پرانتزگذاری‌های متفاوت، متفاوت است که اهمیت پرانتزگذاری را نشان می‌دهد. می‌توان گفت: «با پرانتزگذاری مشخص می‌شود که اول کدام عملگر عمل می‌کند» و این عبارت را معمولاً به‌صورت زیر به‌کار می‌برند.

پرانتزگذاری، تقدم عملگرها را مشخص می‌کند.

یک عبارت محاسباتی زمانی معتبر است که هر **عملگر** بین دو عدد قرار گرفته باشد که آنها را **عملوند** می‌خوانیم. به‌طور مثال عباراتی مانند $+۳$ و $\times +۳$، عبارت‌هایی قابل محاسبه نیستند، چون دو طرف عملگرها، عدد قرار ندارد. اما می‌توان از پرانتز، به‌عنوان یک عملوند استفاده کرد؛ چون نمایندهٔ حاصل عبارت محاسباتی درون پرانتز است. بنابراین، عباراتی مانند $۵ \times (۲+۳)$ و $(۵ \times ۲)+۳$ را عبارت‌هایی محاسباتی می‌خوانیم. اما در این‌صورت عبارت $۵ \times ۳ + ۲$ بی‌معناست؛ ولی با پرانتزگذاری، از آن، دو عبارت متفاوت با دو حاصل متفاوت ساخته می‌شود. برای اینکه همگان، این عبارت را به یک شکل محاسبه کنند، قراردادی جهانی وجود دارد:

ضرب بر جمع مقدم است.

یعنی اول ضرب را انجام می‌دهیم و سپس جمع را. بنابراین برای محاسبهٔ $۵ \times ۲ + ۳$ اول باید ۵×۲ را محاسبه نمود و سپس $(۵ \times ۲) + ۳$ را؛ که برابر است با $۱۰ + ۳$.

در ادامه برای راحتی و وضوح بیشتر، در عبارتی مانند $۳ \times (۴ + ۳)$ برای مشخص کردن یک عملگر، آن را درون دایره می‌گذاریم. به‌طور مثال برای مشخص کردن عملگر $\times$، آن را به صورت $\otimes$ نشان می‌دهیم و از $\oplus$ برای مشخص کردن عملگر $+$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۴.۱: در هر یک از موارد زیر، عملوندهای عملگرهای درونِ دایره را مشخص کنید.

آ. $(۳ \oplus ۴) \times ۵$ ب. $(۳ + ۴) \otimes ۵$ ج. $(۳ + ۴) \otimes (۵ + ۶)$

پاسخ: آ. ۳ و ۴ ب. $(۳ + ۴)$ و ۵ ج. $(۳ + ۴)$ و $(۵ + ۶)$ ■

به تشابه‌ها و تفاوت‌ها توجه کنید.

مثال ۵.۱: هریک از عبارات زیرا را با پرانتزگذاری مناسب محاسبه کنید.

آ. $۲ \times ۳ + ۴ \times ۵$ ب. $۴ + ۲ \times ۳ \times ۵$ ج. $۲ \times ۴ + ۳ \times ۵$

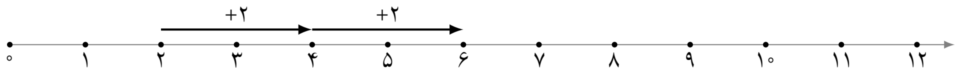
پاسخ: آ. $(۲ \times ۳) + (۴ \times ۵)$ ب. $۴ + ((۲ \times ۳) \times ۵)$ ج. $(۲ \times ۴) + (۳ \times ۵)$

پیشنهاد: حاصل عبارت فوق را با تمام پرانتزگذاری‌ها ممکن محاسبه کنید و تفاوت‌ها را ببینید. ■

برای نمایش ۲×۳ بر محور اعداد، می‌توان ۲×۳ را به‌معنای ۳مرحله قدم برداشتن بر محور اعداد و هر کدام به‌اندازهٔ ۲گام درنظر گرفت و آن را به‌صورت زیر بر محور اعداد نمایش داد.

شخصی به ما خُرده می‌گیرد که نمایش فوق برای $۲+۲+۲+۰$ مناسب است و $۲+۲+۲$ که به‌صورت ۲×۳ بیان می‌شود دارای نمایش زیر است.

نکته‌ای ظریف ... گیج نشوید.



این شخص در مورد نمایش $۲+۲+۲$ و $۲+۲+۲+۰$ بر محور اعداد درست می‌گوید. اما بنا به تعریف (۱.۱) داریم:

$$۳\times۲ = ۲\times۲+۲ = ۱\times۲+۲+۲ = ۰\times۲+۲+۲+۲ = ۰+۲+۲+۲$$

بدین‌ترتیب، نمودار اولی برای ۲×۳ مناسب‌تر است. از طرفی هم از آنجا که ۲×۳ در درک شهودی به‌معنای ۳تا ۲تایی است، نمودار اولی که بر آن ۳تا ۲تایی بهتر دیده می‌شود را ترجیح می‌دهیم.

مثال ۶.۱: هر یک از عبارات زیر را با نمایش بر محور اعداد محاسبه کنید.

آ. ۲×۴ ب. ۴×۳ ج. ۳×۱

د. ۱×۳ ه. ۳×۰ و. ۰×۳.

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

با محاسبهٔ مقادیر داریم:

$$۳+(۱+۳)=۲+۵ \qquad \text{و} \qquad ۲+۴=۴+۲$$

هرچند محاسبهٔ عبارت‌های $(۴+۲)+((۳+۱)+۳)$ و $(۲+۴)+(۵+۲)$ به دو اجرای کاملاً متفاوت از روش محاسبهٔ تعریف (۱.۱) می‌انجامد، اما می‌توان قبل از هر محاسبه‌ای، با توجه به خاصیت زیر نتیجه گرفت حاصل آنها برابر است.

صرفاً خواندنی ... یکبار خواندن این مطلب به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

خاصیت ۱.۱: برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d داریم:
اگر $a=c$ و $b=d$، آن‌گاه $a+b=c+d$

این خاصیت را پیش از این در توجیه معنادار بودن جمع دو عدد نیز بیان کردیم. اقلیدس، ریاضیدان مشهور یونان باستان، این خاصیت را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

«اگر به چیزهای برابر، چیزهایی برابر افزوده شود، نتیجه‌ها برابرند.»

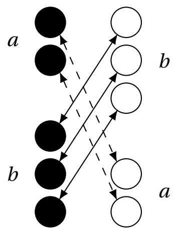
حتی برای محاسبهٔ عبارتی مانند $(۴+۲)+((۳+۱)+۳)$ نیز از این خاصیت استفاده می‌کنیم؛ چون گوییم:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{(۳+(۱+۳))}^{a} = ۳+۴ = \overbrace{۷}^{c}\\ \overbrace{۲+۴}^{b} = \overbrace{۶}^{d}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overbrace{(۳+(۱+۳))}^{a}+\overbrace{(۲+۴)}^{b} = \overbrace{۷}^{c}+\overbrace{۶}^{d} = ۱۳$$

برای ضرب نیز خاصیت خوش‌تعریفی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

خاصیت ۲.۱: برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d داریم:
اگر $a=c$ و $b=d$، آن گاه $ab=cd$

۲.۱ خواص جمع و ضرب



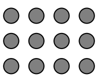
چون $۵ = ۳ + ۲$ و $۵ = ۲ + ۳$ پس $۲ + ۳ = ۳ + ۲$، اما برای رسیدن به این نتیجه، نیازی به محاسبهٔ حاصل عبارات نیست. $۳ + ۲$ به‌معنای تعداد حاصل از افزودن ۳ شیء به ۲ شیء است و $۲ + ۳$ به تعداد حاصل از افزودن ۲ شیء به ۳ شیء اشاره دارد که بنا به شکل مقابل، متناظر، و درنتیجه برابرند. به‌طور مشابه، برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b، با متناظر کردن a شیء از گروه اول با a شیء از گروه دوم، و متناظر کردن b شیء از گروه اول با b شیء از گروه دوم می بینیم که $a + b = b + a$.

خاصیت ۳.۱ (جابجایی جمع)**: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a + b = b + a$.**

بنا به خاصیت جابجایی جمع، جابه‌جا کردن دو عملوندِ یک عملگرِ جمع، تغییری در حاصل جمع ایجاد نمی‌کند. در زیر چند تساوی که نمونه‌هایی از کاربرد خاصیت جابجایی هستند را نشان داده و عملگر جمعی که عملوندهای آن جابه‌جا شده‌اند را به‌صورت $\oplus$ نشان می‌دهیم.

$$(۳ + ۴) \oplus ۵ = ۵ \oplus (۳ + ۴) \qquad ۳ \oplus ۴ = ۴ \oplus ۳$$
$$(۴ \oplus ۳) + ۵ = (۳ \oplus ۴) + ۵ \qquad (۳ + ۴) \oplus (۵ + ۶) = (۵ + ۶) \oplus (۳ + ۴)$$

توجه داریم که در تساوی $(۴ \oplus ۳) + ۵ = (۳ \oplus ۴) + ۵$ خاصیت جابجایی در مورد عبارت درون پرانتز به‌کار رفته است و تساوی دو عبارت از تساوی $۳ + ۴ = ۴ + ۳$ و خاصیت خوش‌تعریفی جمع نتیجه می‌شود. اما برای سادگی، جابه‌جایی عملوندهای هر عملگر جمع را یک نمونه از کاربرد خاصیت جابجایی جمع در نظر می‌گیریم. اما تساوی $۳ + (۴ + ۵) = ۴ + (۳ + ۵)$ یک نمونه از کاربرد خاصیت جابجایی نیست؛ چون دو عملوند هیچ یک از عملگرهای جمع جابه‌جا نشده‌اند.



در مورد ضرب نیز می‌توان بدون شمارش اشیای ۴ بستهٔ ۳ تایی و اشیاء ۳ بستهٔ ۴تایی، از شکل مقابل نتیجه گرفت که $۳ \times ۴ = ۴ \times ۳$. درواقع، شکل مقابل نشان می‌دهد تعداد اشیای موجود در ۳ سطر ۴ تایی برابر است با تعداد اشیای موجود در ۴ ستون ۳تایی. به‌طور مشابه برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b نیز می‌توان نشان داد تعداد اشیای موجود a سطر bتایی برابر است با تعداد اشیای موجود در b ستون aتایی و خاصیت زیر را از آن نتیجه گرفت.

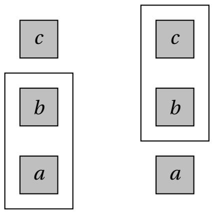
خاصیت ۴.۱ (جابجایی ضرب)**: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a \times b = b \times a$.**

درواقع، بنا به خاصیت جابجایی ضرب، جابه‌جا کردن دو عملوند هر عملگر ضرب، تغییری در حاصل‌ضرب ایجاد نمی‌کند و بنابراین، اگر در یک عبارت محاسباتی، عملوندهای هر عملگر ضربی را جابه‌جا کنیم، حاصل عبارت محاسباتی تغییر نمی‌کند.

واضح است که تساوی $۴ \times (۵ + ۳) = ۵ \times (۴ + ۳)$ یک نمونه از خاصیت جابجایی ضرب نیست، چون دو عددی که جابجا شده‌اند، ۴ و ۵ هستند که عملوندهای هیچ یک از عملگرهای موجود در این عبارت نیستند. البته توجه داریم که $۳۵ = ۵ \times ۷ = ۵ \times (۴ + ۳)$ و $۳۲ = ۴ \times ۸ = ۴ \times (۵ + ۳)$؛ بنابراین، تساوی مورد اشاره نیز نادرست است، در حالی که با استفاده درست از خاصیت جابجایی همیشه تساوی برقرار می‌ماند. به‌طور مشابه، تساوی $۴ + (۵ + ۳) = ۵ + (۴ + ۳)$ نیز یک کاربرد خاصیت جابجایی جمع نیست، چون ۴ و ۵ عملوندهای یک علامت جمع نیستند.

شخصی ادعا می‌کند برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم $a + (b + c) = (a + b) + c$؛ چون هر دو به حاصل اضافه نمودن سه دسته از اشیا با تعدادهای a، b و c شیء اشاره دارند. استدلال

این شخص غلط است، چون $a+(b+c)$ به‌معنای حاصل اضافه نمودن c شیء به b شیء در مرحله اول و اضافه نمودن کل این اشیا به a شیء در مرحلهٔ دوم است؛ در حالی که $(a+b)+c$ به‌معنای اضافه نمودن b شیء به a شیء در مرحله اول و اضافه نمودن c شیء به حاصل آنها در مرحلهٔ دوم است. هرچند استدلال این شخص با توجه به تعریف نادرست است، اما تساوی $a+(b+c)=(a+b)+c$ با متناظر کردن هر شیء در حالت اول، با خودش در حالت دوم واضح است. این تساوی را «خاصیت شرکت‌پذیری جمع» می‌نامیم.



$(a+b)+c=a+(b+c)$

خاصیت ۵.۱ (شرکت‌پذیری جمع): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c}$

مبتدی – ضروری
با دقت بخوانید.

تساوی $۳+(۴+۵)=(۳+۴)+۵$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری است. درحالی که عبارت $۳+(۴+۵)=(۳+۵)+۴$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری نیست. زیرا جای ۴ و ۵ عوض شده ولی در خاصیت شرکت‌پذیری جای اعداد عوض نمی‌شود.
عبارت $(۳+۴)+(۵+۶)=۳+(۴+(۵+۶))$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری است؛ زیرا:

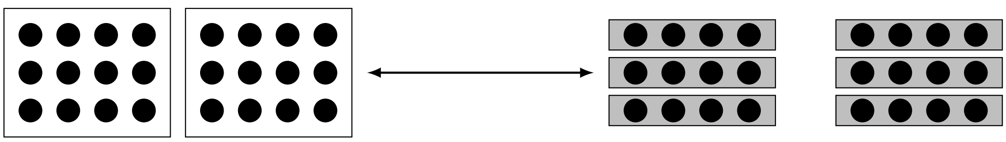
توجه! **توجه!**
به نحوهٔ استفاده از خواص دقت کنید.
به جایگذاری‌ها دقت کنید.

$$(\overbrace{۳}^{a}+\overbrace{۴}^{b})+\overbrace{(۵+۶)}^{c}=\overbrace{۳}^{a}+(\overbrace{۴}^{b}+\overbrace{(۵+۶)}^{c})$$

تساویِ $(۳+۴)+(۵+۶)=(۳+(۴+۵))+۶$ یک کاربردِ خاصیت شرکت‌پذیری نیست؛ زیرا تخصیصِ a، b و c در عبارتِ $(۳+۴)+(۵+۶)$ به‌نحوی‌که یکی از طرفینِ تساویِ خاصیت شرکت‌پذیری را ایجاد کند به دو روش ممکن است که با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری، تساوی‌های زیر را به‌دست می‌دهند که در هیچ‌کدام به $(۳+(۴+۵))+۶$ نمی‌رسیم.

$$\begin{cases}(\overbrace{۳}^{a}+\overbrace{۴}^{b})+\overbrace{(۵+۶)}^{c}=\overbrace{۳}^{a}+(\overbrace{۴}^{b}+\overbrace{(۵+۶)}^{c})\\ \overbrace{(۳+۴)}^{a}+(\overbrace{۵}^{b}+\overbrace{۶}^{c})=((\overbrace{۳+۴)}^{a}+\overbrace{۵}^{b})+\overbrace{۶}^{c}\end{cases}$$

فرض کنید a بسته داریم که هر کدام شامل b بستهٔ c تایی است. در این‌صورت می‌توانیم بگوییم $a.b$ بستهٔ c تایی داریم و تعداد تمامی اشیا را با $(a.b).c$ نمایش دهیم. از طرفی هم می‌توانیم بگوییم هر بستهٔ بزرگ شامل $b.c$ شیء است که در این‌صورت a بستهٔ $b.c$ تایی داریم و درنتیجه $a.(b.c)$ شیء داریم. شکل زیر، درک این استدلال را ساده‌تر می‌کند.



$۲\times(۳\times۴)$ $(۲\times۳)\times۴$

این مطلب را تحت عنوان خاصیت شرکت‌پذیری ضرب بیان می‌کنیم.

خاصیت ۶.۱ (شرکت‌پذیری ضرب): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$\boldsymbol{a.(b.c)=(a.b).c}$

برای آشنایی بیشتر با این خواص به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۷.۱: در هر یک از موارد زیر کدام یک از خواص جمع یا ضرب به‌کاررفته است؟

آ . $۳+(۴+۵)=(۴+۵)+۳$
ب . $۳+(۴+۵)=(۳+۴)+۵$
ج . $۲\times(۵\times۷)=(۵\times۷)\times۲$
د . $۵\times(۷\times۲)=(۵\times۷)\times۲$
ه . $۲\times(۳+۵)=(۳+۵)\times۲$
و . $(۲\times۳)+۵=۵+(۲\times۳)$
ز . $(۲+۳)+(۴+۵)=((۲+۳)+۴)+۵$
ح . $(۲+۳)+(۴+۵)=(۴+۵)+(۲+۳)$
ط . $(۲\times۳)+(۴\times۵)=(۳\times۲)+(۴\times۵)$
ی . $(۲\times۳)\times(۴\times۵)=۲\times(۳\times(۴\times۵))$

پاسخ: آ . جابجایی جمع ب . شرکت‌پذیری جمع ج . جابجایی ضرب
د . شرکت‌پذیری ضرب ه . جابجایی ضرب و . جابجایی جمع
ز . شرکت‌پذیری جمع ح . جابجایی جمع ط . جابجایی ضرب
ی . شرکت‌پذیری ضرب ■

مثال ۸.۱: در هر مورد، درستی یا نادرستی استفاده از خاصیت مربوطه را مشخص کنید.

آ . $۲+(۳+۵)=۳+(۲+۵)$ .... جابجایی جمع
ب . $(۲\times۳)\times(۴\times۵)=(۲\times۴)\times(۳\times۵)$ .... جابجایی ضرب
ج . $۲\times(۳\times۴)=(۲\times۴)\times۳$ .... شرکت‌پذیری ضرب
د . $(۲+۳)+(۴+۵)=(۲+(۳+۴))+۵$ .... شرکت‌پذیری جمع

پاسخ: همه موارد نادرست هستند. کافی است به مطالب قبل مراجعه کنید. توجه: مورد (د) با دو بار استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری جمع به‌دست می‌آید، اما «یک مورد» استفاده از آن نیست. ■

مثال ۹.۱: با استفاده از خواص جمع، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

آ . $۳+(۴+۵)=(۳+۵)+۴$ ب . $(۳+۴)+(۵+۶)=(۵+۳)+(۶+۴)$

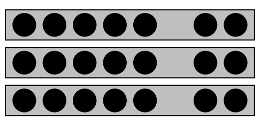
پاسخ: آ .
$۳+(۴+۵)=۳+(۵+۴)$ .... بنا به جابجایی
$=(۳+۵)+۴$ .... شرکت‌پذیری

ب .
$(۳+۴)+(۵+۶)=((۳+۴)+۵)+۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$=(۳+(۴+۵))+۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$=(۳+(۵+۴))+۶$ .... بنا به جابجایی
$=((۳+۵)+۴)+۶$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$=(۳+۵)+(۴+۶)$ .... بنا به شرکت‌پذیری
$=(۵+۳)+(۶+۴)$ .... بنا به جابجایی

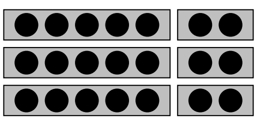
■

توجه! در هر مرحله فقط از یک کاربرد خواص اعداد استفاده می‌شود.

در a بستهٔ bتایی و a بستهٔ cتایی، $(a\times b)+(a\times c)$ شیء داریم. می‌توانیم از آنها a بستهٔ $(b+c)$تایی بسازیم که تعداد آنها برابر است با $a(b+c)$. شکل زیر درک این موضوع را ساده‌تر خواهد کرد.



$۳\times(۵+۲)$



$(۳\times۵)+(۳\times۲)$

خاصیت ۷.۱ (توزیع‌پذیری): **برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند a، b و c داریم:**
$\boldsymbol{a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)}$

خاصیت ۸.۱ (همانی جمع)**: به‌ازای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a + 0 = 0 + a = a$

عبارت فوق به این معناست که با جایگذاری هر عدد طبیعی دلخواه در تمام aها، تساوی‌های فوق برقرار هستند. این خاصیت به زبان ساده می‌گوید جمع عدد صفر با **هر عددی** می‌شود **همان** عدد.

خاصیت ۹.۱ (همانی ضرب)**: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a \times 1 = 1 \times a = a$

به‌وضوح یک بستهٔ aتایی که تعداد اشیای آن با $a \times 1$ نمایش داده می‌شود، a شیء دارد.
$1 \times a$ به تعداد اشیاء موجود در a بسته اشاره دارد که هرکدام شامل یک شیء است و برای اثبات تساوی $1 \times a = a$ کافی است نشان دهیم تعداد اشیاء با تعداد بسته‌ها برابر است. برای این منظور کافی است هر بسته را با شیء درون آن متناظر کنیم.
عبارت $0 \times a$ به‌معنای تعداد اشیای موجود در a بستهٔ خالی است که برابر است با صفر و درنتیجه داریم $0 \times a = 0$ و از خاصیت جابجایی ضرب نتیجه می‌گیریم $a \times 0 = 0$.

خاصیت ۱۰.۱ (ضرب در صفر)**: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:** $a \times 0 = 0 \times a = 0$

تمرین:

(۱) عملوندهای عملگرهایی که با دایره نشان‌گذاری شده‌اند را مشخص کنید.
آ. $(3 + (4 \times 5)) \times (6 \oplus 7)$ ب. $(3 + (4 \otimes 5)) \times (6 + 7)$
ج. $(3 \oplus (4 \times 5)) \times (6 + 7)$ د. $(3 + (4 \times 5)) \otimes (6 + 7)$

(۲) در اتاقی ۴ نفر حضور دارند. ۲ زن و سپس ۳ مرد وارد می‌شوند. **عبارت** مناسب برای محاسبهٔ افراد درون اتاق را بنویسید.

(۳) علی ۴ سیب، حسین ۲ سیب، رضا ۵ سیب و احمد ۶ سیب دارد. در مرحلهٔ اول حسین سیب‌های خود را به رضا، و علی سیب‌های خود را به احمد می‌دهد. در مرحلهٔ دوم احمد سیب‌های خود را به رضا می‌دهد. **عبارت** مناسب برای محاسبهٔ تعداد سیب‌های نزد رضا را بیابید.

(۴) حاصل جمع‌های زیر را با استفاده از محور اعداد محاسبه کنید.
آ. $1 + 3 + 2$ ب. $2 + 3 + 0$ ج. $1 + 1 + 1 + 1$ د. $4 + 1 + 0$

(۵) هر تساوی یک نمونه از کدام خاصیت جمع یا ضرب است؟
آ. $3 \times 0 = 0$ ب. $3 + 0 = 0$
ج. $3 \times 1 = 3$ د. $0 \times 1 = 0$
ه. $(4 + 3) \times (6 \times 5) = (6 \times 5) \times (4 + 3)$ و. $(6 \times 5) \times (3 + 4) = (6 \times 5) \times (4 + 3)$
ز. $6 \times \big(5 \times (4 + 3)\big) = (6 \times 5) \times (4 + 3)$ ح. $(4 + 3) \times (6 \times 5) = (6 \times 5) \times (4 + 3)$

(۶) درستی تساوی‌های زیر را بدون محاسبه و با استفاده از خواص جمع و ضرب نشان دهید.
آ. $(3 + 4) + 5 = 5 + (4 + 3)$ ب. $(4 + 5) + 3 = 5 + (4 + 3)$
ج. $4 \times (5 \times 3) = 5 \times (4 \times 3)$ د. $4 \times (3 \times 5) = 5 \times (4 \times 3)$
ه. $\big((5 + 4) + 6\big) + 3 = (6 + 5) + (4 + 3)$ و. $6 + \big((4 + 5) + 3\big) = (6 + 5) + (4 + 3)$
ز. $4 + \big((3 + 5) + 6\big)$ ح. $\big((3 + 6) + 4\big) + 5 = 6 + \big((5 + 4) + 3\big)$
ط. $(5 \times 4) + (5 \times 3) = 5 \times (4 + 3)$ ی. $(3 \times 5) + (4 \times 5) = 5 \times (4 + 3)$
ک. $\big((3 + 4) \times 6\big) + \big(5 \times (4 + 3)\big) = (6 + 5) \times (4 + 3)$
ل. $\big((6 \times 4) + (5 \times 4)\big) + \big((6 \times 3) + (5 \times 3)\big) = (6 + 5) \times (4 + 3)$

(۷) نشان دهید برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c عبارت $a+(b+c)$ با تمامی عبارت‌های زیر برابر است.(**راهنمایی:** از خواص جمع استفاده کنید.)

آ. $a+(c+b)$ ب. $(a+b)+c$ ج. $(b+c)+a$

د. $(a+c)+b$ هـ. $c+(a+b)$ و. $(c+b)+a$

(۸) درهریک ازتساوی‌های زیر، کدام‌یک ازخواص ضرب دیده می‌شود؟

آ. $۶\times۸=۸\times۶$ ب. $c(a+b)=ca+cb$

ج. $ac+b=ca+b$ د. $(a+c)d+(a+c)e=(a+c)(d+e)$

(۹) درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

آ. $۳\times(۴\times۲)=۴\times(۳\times۲)$ ب. $(۶+۱)۵=(۱)(۵)+(۵)(۶)$

ج. $(۸+۲)۷=۷(۲+۸)$ د. $۷\times۳(۴+۷)=۴\times۳+۳\times۷$

(۱۰) جای خالی را چنان پرکنید که هر عبارت، مثالی از یکی از خواص اعداد گردد. جهت تسلط ذهنی خواننده .

$\ldots\ldots+(۲)(۸)=\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots+(۶)(۳)=\ldots\ldots\ldots$

$\ldots(۷)+\ldots(۷)=(۲+۵)\ldots$ $\ldots(۷)+\ldots(۴)=(۶)\ldots$

(۱۱) عبارات محاسباتی زیر را، به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

آ. ۲۱×۱۴ ب. ۱۱×۱۸ ج. ۳۳×۳۱ د. ۱۷×۲۱

(۱۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید. با خاصیت توزیع‌پذیری مقایسه کنید.

$$a+(b.c)=(a+b)(a+c)$$

(۱۳) نشان دهید برای هر پنج عدد طبیعی a، b، c، d و e داریم: صورت تمرین مهم است.

آ. $a(b+c)=ca+ba$ ب. $(da)(bc)=(ca)(db)$

ج. $ad+de=(e+a)d$ د. $(a+b)(c+d)=ca+bd+ad+cb$

هـ. $(a+b)(a+b)=a.a+۲a.b+b.b$

(۱۴) پس از پرانتزگذاری مناسب با خواص جمع و ضرب، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید. صورت تمرین مهم است.

آ. $۵\times۷=۵\times۴+۱۵$ ب. $۳\times۹=۵\times۳+۳\times۴$

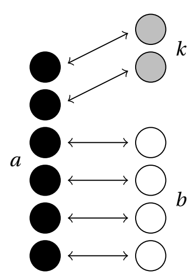
ج. $۳\times۸+۱۵=۱۲+(۵+۴)\times۳$ د. $a(b+c)+bc=(a+c)b+ac$

هـ. $a(b+c)+bc=(a+b)c+ab$

۳.۱ ترتیب اعداد طبیعی

علاوه‌بر گونهٔ انسان امروزی، حتی گونه‌های انسانی اولیه که میلیون‌ها سال پیش بر زمین زندگی می‌کرده‌اند نیز مانند برخی از حیوانات توان درک کمتری و بیشتری بین دو مقدار از کمیت‌هایی مانند وزن، حجم، طول و تعداد را داشته‌اند. البته درک آنها کاملا حسی بوده و شبیه به درک ما از اندازهٔ روشنی یا تیرگی رنگ‌ها بوده است.

استفاده ازسنگ‌ریزه و چوب‌خط اولین نمونه‌هایی است که نشان می‌دهد انسان از درک حسی نسبت به این مفاهیم فراتر رفته است.



در شکل مجاور دایره‌های سفید از دایره‌های سیاه کمتر و دایره‌های سیاه از دایره‌های سفید بیشترند. چون اگر دایره‌های سیاه و سفید را یکی‌یکی با هم حذف کنیم، دایره‌های سفید تمام می‌شوند، درحالی‌که دایره‌های سیاه تمام نشده‌اند. اگر تعداد دایره‌های سیاه باقی‌مانده را k بنامیم و kتا دایرهٔ خاکستری به دایره‌های سفید اضافه کنیم، دایره‌های سیاه با دایره‌های سفید و خاکستری متناظر و درنتیجه هم‌تعداد می‌شوند. از طرفی تعداد دایره‌های خاکستری و سفید، برابر است با $b+k$ و درنتیجه $a=b+k$.

بنابراین، می‌توان گفت چون $۴ + ۲ = ۶$، پس داریم $۴ < ۶$. معمولاً می‌گوییم $۴ + ۲ = ۶$ درنتیجه $۴ < ۶$ و می‌نویسیم $۴ + ۲ = ۶ \Longrightarrow ۴ < ۶$. در این عبارت، نماد $\Longrightarrow$ را نماد استنتاج گوییم. این عبارت را به‌صورت«اگر $۴ + ۲ = ۶$ آن‌گاه $۴ < ۶$» نیز می‌خوانیم که دقیق‌تر است.

تعریف ۳.۱: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم $a < b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود داشته باشد که $a + k = b$.

به‌عبارتی $a < b$ یک خلاصه‌نویسی برای «عدد طبیعی و ناصفرِ k وجود دارد که $a + k = b$». عبارت «اگر و تنها اگر» معمولاً با نماد $\Longleftrightarrow$ نمایش داده می‌شود و عبارتهایی که از تعویض آن با هر یک از نمادهای $\Longrightarrow$ و $\Longleftarrow$ به‌دست می‌آیند، درست هستند. یعنی از $a < b$ می‌توان نتیجه گرفت «برای عددی طبیعی مانند k داریم $a + k = b$» و از این عبارت نیز می‌توان نتیجه گرفت $a < b$.

مفهومی – اختیاری
درک شهودیِ کوچک‌تری با تعریف (۳.۱) یکسان است.

مثال ۱۰.۱: درستی نامساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $۳ < ۷$ ب. $۴ < ۴$ ج. $۶ < ۴$

پاسخ: آ. $۳ + ۴ = ۷ \Longrightarrow ۳ < ۷$ ب. $۴ + ۰ = ۴ \Longrightarrow ۴ \not< ۴$ ج. $۴ + ۲ = ۶ \Longrightarrow ۴ < ۶ \Longrightarrow ۶ \not< ۴$ ■

مثال ۱۱.۱: با فرضِ $x < ۳$ و $y < ۴$ و طبیعی بودنِ x و y، درستیِ عبارات زیر را ثابت کنید.

آ. $x + y < ۳ + ۴$ ب. $x.y < ۳ \times ۴$ ج. $۳y < ۱۲$ د. $۴x < ۱۲$
ه. $۳x < ۹$ و. $۳x < ۱۲$ ز. $x + ۳ < ۶$ ح. $x + ۳ < ۸$
ط. $y + ۳ < ۹$ ی. $x + ۳ < y + ۴$ ک. $۳x < ۴y$

(**راهنمایی:** فقط از تعریف (۳.۱) و خواص اعداد طبیعی استفاده کنید)

پیشرفته – اختیاری
صرفاً برای خواننده علاقه‌مند.

پاسخ: آ. چون $x < ۳$ پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود دارد که $x + k = ۳$. به‌همین طریق چون $y < ۴$ پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k' وجود دارد که $y + k' = ۴$. اگر k و k' چنین اعدادی باشند داریم:

$$(x + k) + (y + k') = ۳ + ۴ \Rightarrow (x + y) + (k + k') = ۳ + ۴ \Rightarrow x + y < ۳ + ۴$$

ب. مشابه مورد (آ) گوییم اعدادی طبیعی و ناصفر مانند k و k' وجود دارند که $x + k = ۳$ و $y + k' = ۴$ و درنتیجه:

$$(x + k) \times (y + k') = ۳ \times ۴ \Rightarrow xy + (ky + xk' + kk') = ۳ \times ۴ \Rightarrow xy < ۳ \times ۴$$

موارد دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

با توجه به درک شهودی از مفاهیم کوچک‌تری و بزرگ‌تری واضح است که دو عدد یا مساوی‌اند یا یکی از آنها بزرگ‌تر است و دیگری کوچک‌تر و واضح است که امکان ندارد همزمان هم مساوی باشند و هم یکی کوچک‌تر از دیگری؛ چون اگر دایره‌های سیاه و سفید را یکی‌یکی با هم حذف کنیم، یک و تنها یک حالت اتفاق می‌افتد. یا هر دو با هم تمام می‌شوند یا سیاه‌ها زودتر تمام می‌شوند و یا سفیدها.

خاصیت ۱۱.۱ (اصل تثلیث)**: برای هر دو طبیعی مانند a و b یک و تنها یکی از سه‌حالت $a < b$، $a = b$ و $a > b$ امکان‌پذیر است.**

قضیه ۱.۱: برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ داریم:

آ. اگر $\boldsymbol{a \neq 0}$ آن‌گاه $\boldsymbol{a > 0}$. **ب. اگر $\boldsymbol{a < b}$ و $\boldsymbol{b < c}$ آن‌گاه $\boldsymbol{a < c}$.**

ج. اگر $\boldsymbol{a < b}$، آن‌گاه $\boldsymbol{a+c < b+c}$. **د. اگر $\boldsymbol{a+c < b+c}$ آن‌گاه $\boldsymbol{a < b}$.**

اثبات: آ. با قرار دادنِ $k = a$ داریم $k = a = k + 0$ و چون $k = a \neq 0$ پس $a > 0$.

ب. $a < b$ و $b < c$، پس اعدادی طبیعی و ناصفر مانند k و k' هستند که $a + k = b$ و $b + k' = c$ و درنتیجه با قرار دادن $a + k$ به‌جای b در $b + k' = c$ داریم $(a + k) + k' = c$ و درنتیجه $a + (k + k') = c$ و چون k و k' هر دو ناصفرند، $k + k'$ نیز ناصفر است و درنتیجه $a < c$.

ج. $a < b$ پس $(k \neq 0)$ $a + k = b;$. بنابراین $(a + k) + c = b + c$. پس $(a + c) + k = b + c$ و درنتیجه $a + c < b + c$.

د. بنا به اصل تثلیث یک و تنها یکی از سه حالت $a < b$، $a = b$ و $a > b$ امکان‌پذیر است.

$$\left\{\begin{array}{lll}
\boldsymbol{a<b} \Longrightarrow a+c<b+c & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{بنا به مورد (ج)} \\
\boldsymbol{a=b} \Longrightarrow a+c=b+c & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{خوش تعریفی جمع} \\
\qquad \Longrightarrow \boldsymbol{a+c \not< b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{اصل تثلیث} \\
\boldsymbol{a>b} \Longrightarrow a+c>b+c & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{بنا به مورد (ج)} \\
\qquad \Longrightarrow \boldsymbol{a+c \not< b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{اصل تثلیث}
\end{array}\right.$$

بنابراین، $a + c < b + c$ فقط زمانی ممکن است که $a < b$، پس می‌توان نتیجه گرفت $a < b$. ■

شخصی ادعا می‌کند اگر $a < b$ آن‌گاه $ac < bc$ و استدلال زیر را بیان می‌کند:

$$a < b \Longrightarrow a + k = b \Longrightarrow (a + k)c = bc \Longrightarrow ac + kc = bc \Longrightarrow ac < bc$$

اما داریم ۳ > ۲ در حالی که $0 \times 3 \not< 0 \times 2$. بنابراین نتیجه‌گیری وی نادرست است. پس می‌توان استدلال را به‌نحوی اصلاح کرد که همیشه نتیجهٔ به‌دست آمده درست باشد؛ چون در غیر این‌صورت استدلال ما هیچ ارزشی ندارد.

این شخص از تساوی $ac + kc = bc$ نتیجه گرفته است که $ac < bc$؛ اما این استدلال زمانی درست است که $kc \neq 0$. اما $kc \neq 0$ زمانی درست است که $k \neq 0$ و $c \neq 0$. از آنجا که بنا به فرض داریم $k \neq 0$، پس استدلال فوق برای هر عدد طبیعی مانند c که $c \neq 0$ درست است.

قضیه ۲.۱: برای هر سه عدد طبیعی دلخواه مانند $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ داریم:

آ. اگر $\boldsymbol{a < b}$ و $\boldsymbol{c \neq 0}$ آن‌گاه $\boldsymbol{ac < bc}$. **ب. اگر $\boldsymbol{ac < bc}$ و $\boldsymbol{c \neq 0}$ آن‌گاه $\boldsymbol{a < b}$.**

اثبات: آ. به مطالب پیش از قضیه رجوع کنید.

ب. با استفاده از مورد (آ) و اصل تثلیث اثبات می‌شود. به اثبات مورد (د) از قضیه قبل رجوع کنید. ■

عبارت $\boldsymbol{a \leq b}$ به معنای «$\boldsymbol{a < b}$ یا $\boldsymbol{a = b}$» در نظر گرفته می‌شود.

به‌طورِ مثال، $3 \not< 3$ اما $3 \leq 3$؛ چون $3 = 3$. همچنین $3 \leq 4$ چون $3 < 4$. اما $4 \not\leq 3$ چون هیچ‌یک از عبارات $4 < 3$ و $4 = 3$ درست نیستند.

مثال ۱۲.۱: نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و b داریم:

$a \leq b$ اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد که $a + c = b$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱.۳.۱ معادلات پایه

با دقت بخوانید...

در ادامه با مفاهیم تفریق و تقسیم آشنا خواهیم شد. تا گذشته‌هایی نه‌چندان دور، این مفاهیم به‌صورت مستقل بیان شده و ارتباط آنها با جمع و ضرب، پایهٔ حل معادلات و نامعادلات بود. اما در این کتاب معادلات و نامعادلات پایه را براساس قضایای فوق و قضیهٔ بعد بیان می‌کنیم تا مهارت‌های لازم برای مباحث پیچیده‌تر را در خلال این مفاهیم ساده کسب کنیم.

قضیه ۳.۱ (حذف جمع): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم؛ اگر $a+c=b+c$ آن‌گاه $a=b$.**

اثبات: کافی است نشان دهیم اگر $a+c \neq b+c$، آن‌گاه هر دو حالت $a<b$ و $a>b$ غیرممکن هستند، سپس از اصل تثلیث نتیجه بگیریم که تنها حالت ممکن $a=b$ است. پس اگر $a+c<b+c$ آن‌گاه $a<b$.
ادامه کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مبتدی – ضروری
اساس حل کردن تمام معادلات و نامعادلات به‌همین سادگی است.

فرض کنید بخواهیم عددی را بیابیم که حاصل‌جمع آن با ۳ مساوی ۷ باشد. اگر آن عدد را با نمادِ x نمایش دهیم می‌توانیم بگوییم:

عددی طبیعی مانند x چنان بیابید که $x+۳=۷$.

عددی که مقدار آن را نمی‌دانیم، «مجهول» می‌گوییم که به‌معنای «نادانسته» است و «معادله» به‌معنای «تساوی»، و «حل کردن معادله» به‌معنای یافتن و معلوم کردنِ مجهول است. معمولاً از حروف آخر الفبای انگلیسی برای نمایش مجهول‌ها استفاده می‌کنیم. این رویه، را رنه دکارت در میان ریاضیدانان مرسوم کرد. به‌طورِ مثال، در معادلهٔ $x+۳=۷$، عددی که مقدار آن را نمی‌دانیم، با x نمایش داده شده و آن را مجهول می‌خوانیم. حل کردن این معادله به‌معنای یافتن عددی مانند x است که به‌ازای آن $x+۳=۷$.

به‌طور شهودی می‌دانیم با برداشتن ۳ شیء از ۷ شیء، ۴ شیء باقی می‌ماند ولی با استفاده از تعریف (۱.۱) داریم:

$$x+۳=۷=۷+۰=۶+۱=۵+۲=۴+۳$$

با نوشتن ۷ به‌صورت ۳+۴ داریم $x+۳=۴+۳$. پس بنا به خاصیت حذف جمع داریم $x=۴$. این نتیجه‌گیری (استدلال) را می‌توانیم به‌صورت زیر خلاصه کنیم.

$$x+۳=۷ \Longrightarrow x+۳=۴+۳ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} x=۴$$

عبارت $x+۳=۷ \Longrightarrow x+۳=۴+۳$ را به‌صورت «$x+۳=۷$، درنتیجه $x+۳=۴+۳$» می‌خوانیم. البته در این عبارت استدلال خود را خلاصه کرده‌ایم. استدلال کامل به صورت زیر است:

داریم $x+۳=۷$ و $۴+۳=۷$، درنتیجه $x+۳=۴+۳$

عبارت «خاصیت حذف جمع» روی علامت استنتاج دوم تأکید دارد که این نتیجه‌گیری با استفاده از خاصیت حذف جمع صورت گرفته است.

برخی از معادلات جواب ندارند. به‌طور مثال معادلهٔ $x+۲=۱$ در اعداد طبیعی جواب ندارد.

برخی از معادلات نیز بی‌شمار جواب دارند. به‌طور مثال، معادلهٔ $x+۱ = x+۱$ بی‌شمار جواب دارد. زیرا با جایگذاریِ هر عدد طبیعی در x، تساوی برقرار می‌ماند؛ پس هر عدد طبیعی می‌تواند یک جواب این معادله باشد.

مثال ۱.۱۳: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x+۴ = ۹$ ب. $x+۳ = ۲x+۱$ ج. $x+۱۰ = x+۵$

پاسخ: آ. $x+۴ = ۹ \Longrightarrow x+۴ = ۵+۴ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} x = ۵$

ب. $x+۳ = x+x+۱ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} ۳ = x+۱ \Longrightarrow ۲+۱ = x+۱ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف جمع}} ۲ = x$

ج. $x+۱۰ = x+۵ \Longrightarrow ۱۰ = ۵$. این نتیجه‌گیری نشان می‌دهد اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند x تساویِ $x+۱۰ = x+۵$ برقرار شود، آن‌گاه تساوی $۱۰ = ۵$ نیز برقرار می‌شود که غیرممکن است. بنابراین چنین عددی وجود ندارد و درنتیجه معادلهٔ فوق **جواب ندارد.** ■

تکنیکی – ضروری نکته‌ای ظریف!
با دقت بخوانید.

برای حل معادلهٔ $۳x = ۶$ عددی مانند x چنان می‌یابیم که حاصل‌ضرب آن در ۳ مساوی ۶ باشد. چون $۲ \times ۳ = ۶$، پس مقدار x چنان است که $۳x = ۳ \times ۲$ و از خاصیت حذفِ ضرب نتیجه می‌گیریم $x = ۲$. اما آیا این استدلال درست است؟ آیا ضرب دارای خاصیت حذف است؟ اگر ضرب دارای خاصیت حذف است، پس چرا استدلال زیر غلط است؟ چرا به نتیجهٔ غلط رسیده است؟

$$۰ = ۰ \Longrightarrow ۲ \times ۰ = ۳ \times ۰ \xRightarrow{\text{خاصیت حذف ضرب}} ۲ = ۳$$

با توجه به خاصیت حذف ضرب که در زیر آمده، این شخص با حذف صفر از دو طرف تساوی، مرتکب اشتباه بزرگی شده است.

قضیه ۱.۴ (حذف ضرب): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
اگر $ac = bc$ و $c \neq ۰$ آن‌گاه $a = b$.

اثبات: کافی است ضمن توجه به شرط $c \neq ۰$، شبیه به اثبات قضیه قبل عمل کنیم. ■

پایهٔ حل معادلات پیچیده در همین استدلال‌های ساده است.

مثال ۱.۱۴: عدد طبیعی x را چنان بیابید که:

آ. $۳x = ۱۲$ ب. $۳(x+۱) = ۶$ ج. $۴x = ۰$

د. $۲x+۴ = ۶$ ه. $۲x = x+۳$ و. $۳x+۵ = ۲x+۹$

درست اندیشیدن را بیاموزیم.

پاسخ: با استفاده از قواعد حذف جمع و ضرب به حل این موارد می‌پردازیم.

آ. $۳x = ۱۲ = ۳ \times ۴ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x = ۴$

ب. $۳(x+۱) = ۶ = ۳ \times ۲ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x+۱ = ۲ = ۱+۱ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x = ۱$

ج. $۴x = ۴ \times ۰ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x = ۰$

د. $۲x+۴ = ۶ = ۲+۴ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} ۲x = ۲ = ۲ \times ۱ \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x = ۱$

ه. $۲x = x+۳ \Longrightarrow x+x = x+۳ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x = ۳$

و. $۳x+۵ = ۲x+۹ \Longrightarrow ۲x+x+۵ = ۲x+۹ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x+۵ = ۹ = ۴+۵ \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x = ۴$ ■

یک راه مهم برای جلوگیری از اشتباه، بررسیِ درستیِ جواب است. کافی است جواب یا جواب‌های به‌دست آمده را در مجهول‌های معادله جایگذاری کنیم، اگر تساوی برقرار نشد، جواب به‌دست آمده

اشتباه است. این عمل را امتحان کردن جواب گویند.

مبتدی – ضروری
اشتباهی رایج ...

مثال ۱۵.۱: شخصی معادلهٔ $2x+4=10$ را به صورت زیر حل می‌کند:

$$2x+4=10=2\times 5 \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x+4=5=1+4 \xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=1$$

اما با قرار دادن $x=1$ ، می‌بینیم که جواب اشتباه است. چرا؟

پاسخ: این شخص، نمادهای a، b و c را به شکل زیر در نظر گرفته‌است.

$$\overbrace{2}^{c}\times\overbrace{x+4}^{a}=\overbrace{2}^{c}\times\overbrace{5}^{b}\Longrightarrow\overbrace{x+4}^{a}=\overbrace{5}^{b}$$

اما توجه داریم که ۲ در x ضرب شده و نه در $x+4$. بنابراین، $c\times a$ در سمت چپ تساوی تشکیل نمی‌شود.
اما با درنظر گرفتن نمادهای a، b و c به شکل زیر می‌توان از خاصیت حذف جمع استفاده نمود.

$$\overbrace{2x}^{a}+\overbrace{4}^{c}=\overbrace{6}^{b}+\overbrace{4}^{c}\Longrightarrow\overbrace{2x}^{a}=\overbrace{6}^{b}$$

در ادامه، به صورت زیر از خاصیت حذف ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\overbrace{2}^{c}\times\overbrace{x}^{a}=\overbrace{2}^{c}\times\overbrace{3}^{b}\Longrightarrow\overbrace{x}^{a}=\overbrace{3}^{b}$$

■

۲.۳.۱ نامعادلات پایه

اولین نامعادلاتی که باید به آنها توجه کرد، نامعادلاتی به شکل $x<a$ می‌باشند؛ که در آن a عددی طبیعی است. برای حل کردن یک نامعادله، باید مشخص کرد با جایگذاریِ چه اعدادی در مجهول یا مجهول‌ها، نامساوی برقرار خواهد بود. با توجه به **محور اعداد،** به‌راحتی جواب یا جواب‌های نامعادلاتی به‌شکل $x<a$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۶.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x<4$ — ب. $x\le 5$ — ج. $x\le 0$

د. $x<0$ — هـ. $x>4$ — و. $x\ge 4$

ز. $0<x<6$ — ح. $3\le x<7$ — ط. $4<x\le 6$

پاسخ: این نامعادلات، با توجه به تعریف (۳.۱) به راحتی حل می‌شوند.

آ. $x=0,1,2,3$ — ب. $x=0,1,2,3,4,5$ — ج. $x=0$

د. جواب ندارد — هـ. $x=5,6,7,8,\ldots$ — و. $x=4,5,6,7,8,\ldots$

ز. $x=1,2,3,4,5$ — ح. $x=3,4,5,6$ — ط. $x=5,6$ ■

برای نامعادلهٔ $x+3<5$، بنا به قضیه (۱.۱) داریم: $x+3<2+3 \Longleftrightarrow x<2$

بنابراین با جایگذاریِ اعداد ۱ و ۰ به‌جای x، نامساویِ $x<2$ و درنتیجه نامساویِ $x+3<5$ برقرار خواهد بود.

برای نامعادلهٔ $3x<12$ بنا به قضیه (۲.۱) داریم: $3x<12=3\times 4 \overset{3\neq 0}{\Longleftrightarrow} x<4$

بنابراین، مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ جواب‌های این نامعادله هستند.

مثال ۱۷.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $2x<6$ — ب. $3x<15$ — ج. $2x+5<9$

د. $5x+7<6$ — هـ. $3(x+4)<12$ — و. $3x+4<2x+10$

پاسخ: آ. بنا به تعریف (۳.۱) داریم $۲x < ۲ \times ۳ \Longrightarrow x < ۳$

ج. $۲x + ۵ < ۴ + ۵$ پس $۲x < ۴$ بنابراین $۲x < ۲ \times ۲$ در نتیجه $x < ۲$. بنابراین به ازای $x = ۰$ و $x = ۱$ نامساوی برقرار خواهد بود.

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

تمرین:

با دقت و جدیت پاسخ دهید
با پاسخ به این تمرین نکاتی اساسی و مهم خواهید آموخت و مهارت‌هایی پایه‌ای و ضروری کسب خواهید کرد.

(۱۵) با استفاده از تعریف «<» ثابت کنید :

آ. $۳ < ۴$ ب. $۷ < ۲۵$

(۱۶) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x + y = ۰$ ب. $x + y = ۳$ ج. $x.y = ۱$

د. $x.y = ۲$ ه. $x.y = ۳$ و. $x.y = ۰$

در مسیر یادگیری ریاضی، باید با دو پای «دانش» و «مهارت» گام برداشت.

(۱۷) نشان دهید در اعداد طبیعی:

آ. اگر $x < ۳$ آنگاه $x < ۵$ ب. اگر $۳x < ۳$ آنگاه $x \geq ۲$

ج. اگر $x < ۳$ آنگاه $۲x < ۶$ د. اگر $x > ۴$ آنگاه $x + ۱ > ۵$

ه. اگر $x < ۳$ آنگاه $۴x < ۱۵$ و. اگر $x < ۳$ آنگاه $x.x < ۹$

ز. اگر $۲x < ۶$ آنگاه $x < ۳$ ح. اگر $x + ۴ < ۷$ آنگاه $x < ۳$

ط. اگر $x + ۱ < ۴$ آنگاه $۳x + ۲ \leq ۸$ ی. اگر $۳(x + ۲) \geq ۹$ آنگاه $x + ۴ > ۴$

به تفاوت میان < و ≤ توجه کنید.

(۱۸) درستی یا نادرستی عبارات زیر را در اعداد طبیعی بررسی کنید.

آ. اگر $a < b$ آنگاه $a \leq b$ ب. اگر $a < b$ و $b < c$ آنگاه $a < c$

ج. اگر $a < b$ و $b < c$ آنگاه $a \leq c$ د. اگر $a < b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$

ه. اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a < c$ و. اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$

ز. اگر $a \leq b$ آنگاه $a < b$ ح. اگر $a < b$ و $a \leq c$ آنگاه $c < b$

موارد مشابه جهت توجه خواننده به تفاوت میان ≤ و < آورده شده است.

(۱۹) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x < ۵$ ب. $x \leq ۵$ ج. $x > ۵$ د. $x \geq ۵$

ه. $x + ۳ < ۵$ و. $x + ۲ \leq ۶$ ز. $x + ۱ < x + ۲$ ح. $x + ۳ < x + ۲$

ط. $۲x < ۲$ ی. $۲x < ۱$ ک. $۳x < ۱۲$ ل. $۳x < ۱۴$

م. $۳x \leq ۱۲$ ن. $۳x \leq ۱۴$ س. $۳x + ۳ \leq ۱۵$ ع. $۴x + ۳ \leq ۱۵$

ف. $۲x \geq ۲$ ص. $۲x \geq ۱$ ق. $x + y \leq ۰$ ر. $x + y < ۰$

ش. $x + y \leq ۱$ ت. $x + y \leq ۲$ ث. $x.y \leq ۰$ خ. $x.y \leq ۱$

ذ. $x.y > ۰$ ض. $۰ < x.y \leq ۲$

(۲۰) با فرض اینکه x و y دو عدد طبیعی هستند که $۳ < x < ۵$ و $۲ \leq y \leq ۷$، درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را تعیین کنید.

آ. $x < ۵$ ب. $x \leq ۵$ ج. $y < ۷$

د. $y \leq ۷$ ه. $x > ۳$ و. $x \geq ۳$

ز. $y > ۲$ ح. $y \geq ۲$ ط. $۵ \leq x + y \leq ۱۲$

ی. $۵ \leq x + y < ۱۲$ ک. $۵ < x + y \leq ۱۲$ ل. $۵ < x + y < ۱۲$

م. $۶ \leq x.y \leq ۳۵$ ن. $۶ \leq x.y < ۳۵$ س. $۶ < x.y \leq ۳۵$

ع. $۶ < x.y < ۳۵$ ف. $۴ \times ۲ \leq x.y \leq ۷ \times ۴$ ص. $۳ \times ۳ \leq x.y \leq ۶ \times ۵$

ق. $۱۲ \leq x + x.y \leq ۳۲$

توجه! برای پاسخ دادن به این تمرین وقت بگذارید و خوب فکر کنید.

(۲۱) درستی یا نادرستی استفاده از حذف ضرب را در هر یک از موارد زیر مشخص کنید.

آ. $۳x + ۵ = ۳ \times ۹ \Longrightarrow x + ۵ = ۹$ ب. $\circ \times ۴ = \circ \times ۴ \Longrightarrow ۴ = ۴$

ج. $x.y = x.۳ \Longrightarrow y = ۳$ د. $۳(x + ۱) = ۳ \times ۷ \Longrightarrow x + ۱ = ۷$

(۲۲) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی a و b، نامعادلهٔ $a + x = b$ در $\mathbb{N}$ جواب دارد، اگر و تنها اگر $a \leq b$

(۲۳) نشان دهید اگر $a \leq b$، معادلهٔ $a + x = b$ جواب منحصربه‌فرد دارد.

(۲۴) برای هر دو عدد طبیعی a و b، گوییم a مضرب b است اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد که $a = bc$. با این تعریف، به موارد زیر پاسخ دهید.

آ. به‌اعدادی که مضربی از ۲ هستند زوج گویند. اعداد طبیعیِ زوج را مشخص کنید.

ب. به‌اعدادی که مضربی از ۲ نیستند، فرد گویند. اعداد طبیعیِ فرد را مشخص کنید.

ج. نشان دهید صفر مضرب همهٔ اعداد طبیعی است.

د. نشان دهید تنها مضربِ صفر، صفر است.

ه. نشان دهید اگر a و b مضارب t باشند، $a + b$ نیز مضرب t است.

و. نشان دهید اگر a مضرب b باشد، ac نیز مضرب b است.

ز. اگر a مضرب b باشد، آنگاه یا $a = \circ$ یا $a \geq b$.

(۲۵) اعداد طبیعی a و b را چنان بیابید که معادلهٔ $ax = b$ بیش از یک جواب داشته باشد.

(۲۶) نشان دهید اگر $a \neq \circ$، جواب معادلهٔ $ax = b$ در صورت وجود یکتاست.

(۲۷) نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، c و d که $a + b = c + d$، داریم: $a < c$ اگر و تنها اگر $b > d$

با دقت و حوصله پاسخ دهید. نباید اشتباه کنید.

(۲۸) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را در $\mathbb{N}$ مشخص کنید.

آ. اگر $ac < bc$، پس $c \neq \circ$ ب. اگر $ac < bc$، پس $a < b$

ج. اگر $ac \leq bc$، پس $a \leq b$

موارد مختلف و پاسخ آنها را با هم مقایسه کنید.

(۲۹) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x + ۵ = ۹$ ب. $x + ۴ = ۴$

ج. $۵ + y = ۶$ د. $۴ + z = ۳$

ه. $۳ + t = ۱$ و. $۴x = ۱۶$

ز. $۸x = \circ$ ح. $۴x = ۵$

ط. $\circ \times x = ۳$ ی. $\circ \times x = \circ$

ک. $۴x + ۵ = ۹$ ل. $۳x + ۴ = ۱۹$

م. $۴x + ۸ = ۵x + ۳$ ن. $۳x + ۸ = ۶x + ۲$

س. $۳(x + ۳) = ۱۵$ ع. $(x + ۳) = ۳(x + ۱)$

ف. $۳(x + ۱) + ۲ = ۲(x + ۳) + ۱$ ص. $۲(۲(x + ۲) + ۱) + ۱ = ۳x + ۱۸$

ق. $۲(x + ۳) + ۴ = ۳(x + ۱) + ۶$ ر. $۳x + ۵ = ۵x + ۱$

ش. $۴x + ۱ = x + ۷$ ت. $۳(x + ۵) + ۳ = ۵(x + ۱) + ۲$

۴.۱ تفریق و تقسیم

با دقت بخوانید
به نحوهٔ تعریف تفریق و تقسیم بر اساس جمع و ضرب و استدلال براساس آن توجه کنید.
مفاهیم زیادی به طور مشابه با استفاده از مفاهیم دیگر ساخته می‌شوند.

۱.۴.۱ تفریق

در دبستان آموختیم که $a-b$، حاصل برداشتن b شئ از a شئ است. پس یک بستهٔ a تایی را به دو بستهٔ b تایی و $(a-b)$ تایی تبدیل کرده‌ایم که حاصل جمع این دو بسته a است. یعنی:

$a-b$ عدد منحصربه‌فردی است که حاصل‌جمع آن با b برابر است با a.

بنابراین، اگر مقدار $a-b$ را x بنامیم، داریم $x+b=a$. پس می‌توان $a-b$ را جواب معادلهٔ $x+b=a$ در نظر گرفت. با توجّه به تمرین (۲۳) اگر $a\geq b$، معادلهٔ $x+b=a$ دارای جواب منحصربه‌فرد است و اگر $a\ngeq b$ معادلهٔ $x+b=a$ جواب ندارد. به‌طورِ مثال، تفریقِ $۳-۴$ در $\mathbb{N}$ دارای جواب نیست و بی‌معنا است؛ زیرا $۳\ngeq ۴$. برای محاسبهٔ تفریق $۶-۲$ گوییم:

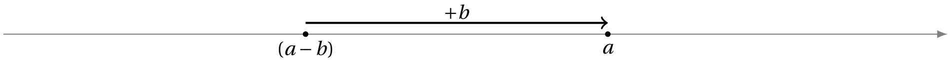
$$x=۶-۲\Longrightarrow ۶=x+۲\Longrightarrow ۴+۲=x+۲\xRightarrow{\text{حذف جمع}} x=۴$$

بنابراین تفریق را به‌طورِ رسمی، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۴.۱: برای هر دو عدد طبیعیِ دلخواهِ a و b که $a\geq b$، حاصل تفریق b از a را با $a-b$ نشان می‌دهیم که عدد طبیعی منحصربه‌فردی است مانند x که $a=x+b$.

به چگونگی به‌دست آمدن نمایش تفریق از نمایش جمع بر محور اعداد توجه کنید.

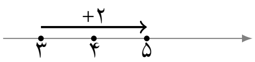
تفریق را می‌توان روی محور اعداد نیز نشان داد. اگر $x=a-b$، بنا به تعریف (۴.۱) داریم $x+b=a$. یعنی پیکانی به‌طول b از $a-b$ آغاز می‌شود و انتهای آن بر a قرار می‌گیرد. بنابراین پیکانی به‌طول b (جهت آن به سمت راست) چنان می‌کشیم که انتهایِ آن بر a باشد، در این‌صورت ابتدای آن پیکان بر $a-b$ خواهد بود. (به شکل زیر توجه کنید.) در واقع، چون $x=a-b$ نگارش دیگری از $a=x+b$ است، پس هر دو بر محور اعداد نمایش یکسانی دارند.



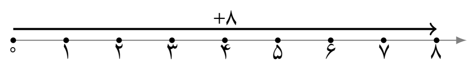
مثال ۱۸.۱: حاصل عبارات زیر را با استفاده از تعریف فوق محاسبه نموده وتفریق‌ها را روی محور اعداد نشان دهید.

مثالی ساده با نتیجه‌ای مهم

آ. $۵-۲$ ب. $۸-۸$ ج. $۵-۸$

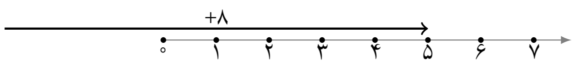


پاسخ: آ. چون $۵=۵+۰=۴+۱=۳+۲=۳+۲$ پس $۳=۲-۵$.



ب. چون $۸=۸+۰$ پس $۰=۸-۸$

ج. $۸\ngeq ۵$ پس معادلهٔ $x+۸=۵$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد و درنتیجه جمع هیچ عددی از $\mathbb{N}$ با ۸ برابرِ ۵ نمی‌شود.



بنابراین $۵-۸$ در $\mathbb{N}$ جواب نداشته و بی‌معناست. ■

با دقت بخوانید...

در مورد (ج) از مثال فوق مشاهده کردیم که اگر $a < b$ آن‌گاه $a-b$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست. توجه داریم که اگر $a < b$ باشد، نمی‌توان از تعریف (۴.۱) برای محاسبهٔ $a-b$ استفاده کرد. به‌عبارتی اگر $a < b$، تعریف (۴.۱) عبارت $a-b$ را تعریف نمی‌کند. به‌همین سبب گاهی به‌جای اینکه بگوییم $a-b$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست، می‌گوییم $a-b$ در $\mathbb{N}$ تعریف نشده است.

گزاره ۳.۱: برای هر عدد طبیعی مانند a داریم: $\boldsymbol{a-a=0}$

اثبات: صفر عنصر همانی جمع است پس $a+0=a$ که ازتعریف تفریق نتیجه می‌شود $a-a=0$. ■

تساوی‌های ارائه شده را به‌خاطر بسپارید.

مثال ۱۹.۱: با فرض معنادار بودن تفریق‌ها در $\mathbb{N}$ ثابت کنید:

آ. $a+(b-c)=(a+b)-c$ ب. $a-(b+c)=(a-b)-c$

ج. $(a+b)-c=(a-c)+b$ د. $(a-b)-c=(a-c)-b$

پاسخ: آ. بنا به تعریف تفریق، $x=(a+b)-c$ اگر وتنها اگر $x+c=a+b$ پس برای اثبات تساوی، کافی است نشان دهیم $(a+(b-c))+c=a+b$. (ادامه راه حل، با استفاده از شرکت‌پذیریِ جمع و تعریف تفریق، سَرراست است. اثبات را کامل کنید.)

ب. بنا به تعریف تفریق، $x=a-(b+c)$ اگر و تنها اگر $x+(b+c)=a$. پس کافی است نشان دهیم $((a-b)-c)+(b+c)=a$ (ادامهٔ راه سرراست است.)

ج. مشابه موارد (آ) و(ب) به سادگی انجام می‌شود.

د. با استفاده از مورد (ب) وخاصیت جابجایی جمع به سادگی اثبات می‌شود. ■

نکته‌ای ظریف...

در مثال فوق، شرط معنادار بودن تفریق‌ها بسیار مهم است. زیرا ممکن است برخی از تفریق‌ها معنادار نباشند. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۰.۱: شخصی عبارت $۴+(۳-۵)$ را چنین محاسبه می‌کند. می‌گوید بنا به مورد (آ) از مثال قبل داریم: $۴+(۳-۵)=(۴+۳)-۵=۷-۵=۲$

اما $۳-۵$ در اعداد طبیعی تعریف نشده و درنتیجه $۴+(۳-۵)$ نیز در اعداد طبیعی تعریف نشده است. درحالی‌که $(۴+۳)-۵$ در اعداد طبیعی تعریف شده است و جواب دارد. ■

قضیه ۵.۱ (تعمیم توزیع‌پذیری به تفریق): **برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و c داریم:**
$\boldsymbol{a(b-c)=(a.b)-(a.c)}$

اگر در درک اثبات مشکل دارید، پاسخ مثال (۱۹.۱) را دوباره بخوانید.

اثبات:

(۱) $(b-c)+c=b$ .... بنا به تعریف تفریق

(۲) $a((b-c)+c)=ab$ .... ضرب طرفین (۱) در a

(۳) $a(b-c)+ac=ab$ .... از (۲) و توزیع‌پذیری

(۴) $a(b-c)=ab-ac$ .... از (۳) و تعریف تفریق

(شماره گذاری تساوی‌ها جهت بیان واضح‌تر نتیجه‌گیری‌ها انجام شده است.) ■

۲.۴.۱ تقسیم

به خاطر داریم در دبستان اگر می‌خواستیم a را بر b تقسیم کنیم، a شیء را به b بستهٔ هم‌اندازه تقسیم می‌کردیم و تعداد اشیای موجود در هر بسته را حاصل تقسیم a بر b می‌خواندیم. اگر هر بسته دارای x شیء باشد، b بستهٔ x تایی داریم و درنتیجه $bx=a$. بر همین اساس می‌توان حاصل تقسیم a بر b

را به‌عنوان جواب معادلهٔ $bx = a$ تعریف کرد. واضح است که این جواب هم باید وجود داشته باشد و هم باید منحصربه‌فرد باشد تا عبارت $a \div b$ عددی خاص را به‌عنوان حاصل تقسیم مشخص سازد.

حاصل تقسیم a بر b، عدد منحصربه‌فردی است که حاصل‌ضرب آن در b مساوی a است.

تقسیم a بر b، به شکل‌های $\frac{a}{b}$، $a \div b$ و a/b نشان داده می‌شود. a را «مقسوم [1]» و b را «مقسومٌ علیه [2]» می‌خوانیم. در نمایش $\frac{a}{b}$، a را «صورت» و b را «مخرج» می‌خوانیم. البته نمایش $\frac{a}{b}$ که به نمایش کسری معروف است، برای بیان اعداد کسری استفاده می‌شود؛ خواهیم دید کسر و تقسیم رابطهٔ نزدیکی به هم دارند و می‌توانند به‌جای هم به‌کار روند.

تمرین (۲۶) را نیز درنظر داشته باشید.

چون $۶ = ۲ \times ۳$ پس $۲ = ۳ \div ۶$. اما $۲ \div ۳$ در $\mathbb{N}$ بی‌معناست. چون معادلهٔ $۲x = ۳$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد.

با دقت بخوانید.
یک اشتباه رایج این است که تقسیم بر صفر را «بی‌نهایت» می‌خوانند. در این قسمت می‌بینید که این افراد معنای تقسیم را نمی‌دانند و در مبحث حد می‌بینیم که این افراد معنای حد را نیز نمی‌دانند.

توجه داریم که حاصل‌ضرب هر عددی در صفر برابر است با صفر. بنابراین به‌طور مثال برای ۳ داریم $۰ = ۰ \times ۳$ که با تعریف تقسیم نتیجه می‌دهد $۰ = ۳ \div ۰$ اما برای $(۰ \div ۰)$ چه می‌توان گفت؟ شخصی می‌گوید بنا به خاصیت ضرب در صفر و تعریف تقسیم داریم:

$$۰ \times ۳ = ۰ \Longrightarrow ۰ \div ۰ = ۳ \text{ و } ۰ \times ۴ = ۰ \Longrightarrow ۰ \div ۰ = ۴$$

بنابراین معادلهٔ $۰ = x \times ۰$ جواب **منحصربه‌فردی** ندارد و درنتیجه این تقسیم بی‌معنا است. آیا $۰ \div ۴$ بامعنا است؟ چون حاصل‌ضرب هیچ عددی در صفر، ۴ نمی‌شود پس تقسیم ۴ بر صفر، هیچ عددی را در $\mathbb{N}$ مشخص نمی‌کند؛ به‌عبارتی معادلهٔ $۴ = x \times ۰$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد. پس $(۰ \div ۴)$ نیز بی‌معنا است.

گزاره ۴.۱: تقسیم بر صفر بی‌معنا است.

اثبات: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

بدین‌ترتیب، $a \div b$ برای $b = ۰$ بی‌معنا بوده و برای $b \neq ۰$ در صورتی که بامعنا باشد، عددی منحصربه‌فرد را مشخص می‌سازد. به‌عبارتی معادلهٔ $bx = a$ برای $b \neq ۰$ حداکثر یک جواب دارد و می‌توان تعریف زیر را برای تقسیم ارائه کرد.

تعریف ۵.۱: برای هر سه عدد طبیعیِ a، b و x که $b \neq ۰$، گوییم: $x = a \div b$ اگر و تنها اگر $a = bx$.

با توجه به مطالب فوق، تمرین (۳۴) وشرط $b \neq ۰$ مقدار x که حاصل تقسیم است، در صورت وجود یکتا است.

با توجه به تعریف فوق، $۲ = ۳ \div ۶$، چون $x = ۲$ تنها جواب معادلهٔ $۳x = ۶$ است. همچنین $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{۳}{۰}$ «تعریف نشده» هستند. (به شرط $b \neq ۰$ در تعریف توجه کنید.)

مثال ۲۱.۱: درستی یا نادرستی استفاده از تعاریف تفریق و تقسیم را بررسی کنید؟

ساده اما ضروری. وقت‌گیر نخواهد بود.

آ. $\frac{۶}{۳} = ۲ \Longrightarrow ۶ = ۲ \times ۳$ .... تعریف تقسیم

ب. $۳ - ۷ = ۴ \Longrightarrow ۷ = ۴ + ۳$ .... تعریف تفریق

ج. $۲ \div ۸ = ۴ + x \Longrightarrow ۸ = ۴ + (x \times ۲)$ .... تعریف تقسیم

---

[1] مقسوم = آنچه تقسیم می‌شود.

[2] مقسوم‌علیه = آنچه تقسیم بر آن صورت می‌گیرد.

د. $(۳ \times x) + ۴ = ۲ \times x \Longrightarrow ((۳ \times x) + (۴)) - (۲ \times x) = ۰$ .... **تعریف تفریق**

ه. $(۵ \times x) - ۷ = (۲ \times x) + ۳ \Longrightarrow ۵ \times x = (۲ \times x) + (۳ + ۷)$ ...... **تعریف تفریق**

پاسخ: آ. درست ب. نادرست

ج. نادرست است. زیرا $x + ۴ = ۸ \div ۲ \Longleftrightarrow ۲ \times (x + ۴) = ۸$ در حالی که

$(۲ \times x) + ۴ = ۸ \Longleftrightarrow ۲ \times x = ۸ - ۴ \Longleftrightarrow x = (۸ - ۴) \div ۲$

د. درست است. ه. نادرست است. ■

توجه! نکته‌ای بسیار ظریف: درک این مطلب به شما کمک خواهد کرد تا در خواندن ریاضیات دقت کافی داشته باشید.

مثال ۲۲.۱: شخصی ادعا می‌کند که $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ و اثبات زیر را ارائه می‌دهد:

$$x = a.\frac{b}{c} \xRightarrow{\text{خوش‌تعریفی ضرب}} x.c = \left(a.\frac{b}{c}\right).c \xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} x.c = a.\left(\frac{b}{c}.c\right)$$
$$\xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x.c = a.b \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = \frac{a.b}{c}$$

اما استدلال وی غلط است. به‌طور مثال:

$$\frac{۴ \times ۱۵}{۶} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰$$

پس $\frac{۴ \times ۱۵}{۶}$ در $\mathbb{N}$ قرار دارد که بنا به استدلال فوق برابر است با $۴ \times \frac{۱۵}{۶}$. اما از آنجا که عبارت $۱۵ \div ۶$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد و در $\mathbb{N}$ بی‌معنا است پس $۴ \times \frac{۱۵}{۶}$ نیز در $\mathbb{N}$ بی‌معنا است.

نکته ظریفی در اینجا وجود دارد. اگر $\frac{b}{c}$ عددی در $\mathbb{N}$ باشد، پس b مضربی از c است و ab نیز مضربی از c است. پس $\frac{ab}{c}$ نیز در $\mathbb{N}$ جواب دارد و بامعنا است. اما اگر $\frac{ab}{c}$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، لزومی ندارد $\frac{b}{c}$ در $\mathbb{N}$ جواب داشته باشد. ■

آیا در مثال فوق، مجاز به استفاده از شرکت‌پذیری هستیم؟ توجه داریم که یک تقسیم در صورتی بامعنا است که حاصل آن یک عدد طبیعی باشد و اعداد طبیعی دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری هستند. بنابراین در مثال فوق، استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری با شرط معنادار بودنِ تقسیم قابل قبول است. پس اگر $\frac{b}{c}$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، مشابه مثال فوق داریم $a.(\frac{b}{c}) = \frac{a.b}{c}$

مثال ۲۳.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b} = ۰$ آنگاه $a = ۰$ ب. اگر $a = ۰$ آنگاه $\frac{a}{b} = ۰$

با دقت بخوانید... نکتهٔ ظریفی را به شما یادآور می‌شود.

پاسخ: آ. درست است. بنا به تعریف تقسیم واضح است.

ب. نادرست است. کافی است قرار دهیم $a = ۰$ و $b = ۰$. در این صورت حاصل تقسیم وجود ندارد، پس نمی‌تواند با صفر برابر باشد. ■

حاصل تقسیم‌های $۳ \div ۹$ و $۲ \div ۶$، هر دو برابر ۳ هستند زیرا:

$$۳ \times ۳ = ۹ \Rightarrow \frac{۹}{۳} = ۳ \quad \text{و} \quad ۲ \times ۳ = ۶ \Rightarrow \frac{۶}{۲} = ۳$$

پس $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$. اما دو تقسیم تحت چه شرایطی برابر هستند؟

صورت مثال مهم است.

مثال ۲۴.۱: نشان دهید با فرض معنادار بودن تقسیم‌ها در $\mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ اگر و تنها اگر } ad = bc$$

با دقت بخوانید...
از خوانندگان انتظار داریم این‌گونه استدلال کنند.

پاسخ: در مرحلهٔ اول باید ثابت کنیم اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آنگاه $a.d = b.c$.
حاصل $\frac{a}{b}$ را x می‌نامیم، پس $x = \frac{a}{b}$ و چون $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ پس $x = \frac{c}{d}$. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \Longrightarrow b.x = a \Longrightarrow (b.x).c = a.c \\ x = \frac{c}{d} \Longrightarrow d.x = c \Longrightarrow a.(d.x) = a.c \end{array}\right\} \Longrightarrow b.c.x = a.d.x$$

اما چون نمی‌دانیم $x = 0$ یا $x \neq 0$، نمی‌توانیم از قاعدهٔ حذف ضرب استفاده کنیم. از این رو مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.
- $x \neq 0$: در این‌صورت از قاعدهٔ حذف ضرب داریم $a.d = b.c$
- $x = 0$: در این صورت داریم $a = 0$ و $c = 0$، و درنتیجه $b.c = 0$ و $a.d = 0$ پس $a.d = b.c$

در مرحلهٔ دوم باید ثابت کنیم اگر $a.d = b.c$ و تقسیم‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ بامعنا باشند، آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
از بامعنا بودن تقسیم‌ها نتیجه می‌شود $b \neq 0$ و $d \neq 0$ بنابراین اگر $x = \frac{a}{b}$، آنگاه:

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{b} &\Longrightarrow b.x = a \Longrightarrow (b.x).d = a.d \\ &\xRightarrow{a.d=b.c} b.d.x = bc \\ &\xRightarrow{b\neq 0} d.x = c \\ &\Longrightarrow x = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

درنتیجه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و حکم اثبات شده است. ■

صورت مثال مهم است.
هرچند انتظار می‌رود اکثر خوانندگان آن را بدانند. اما سعی در اثبات آن می‌تواند در یادگیری بهتر آن مفید باشد.

مثال ۲۵.۱: در صورتی که تقسیم‌ها در $\mathbb{N}$ بامعنا باشند، ثابت کنید :

آ. $\frac{a}{c}.\frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$ ب. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ج. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

پاسخ: آ. بنا به تعریف تقسیم برای اثبات تساوی، کافی است ثابت کنیم: $\left(\frac{a}{c}.\frac{b}{d}\right)(cd) = ab$
ادامه اثبات سر راست است.
موارد دیگر، مشابه مورد (آ) ثابت می‌شوند. ■

۳.۴.۱ پرانتزگذاری

تا زمانی که با جمع و ضرب سروکار داشتیم برای محاسبه عبارت‌های ۴ + ۳ + ۲ و ۴ × ۳ × ۲ پرانتزگذاری را به هر شکلی که انجام می‌دادیم، حاصل تغییر نمی‌کرد. چون جمع و ضرب دارای خواص شرکت‌پذیری هستند. اما عبارات ۲ − ۴ − ۸ و ۲ ÷ ۴ ÷ ۸ را می‌توان به چند طریق پرانتزگذاری کرد

که در هر روش نیز جوابی متفاوت به‌دست می‌دهد.

$$\left\{\begin{array}{l} ۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow (۸ \div ۴) \div ۲ = ۲ \div ۲ = ۱ \\ ۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow ۸ \div (۴ \div ۲) = ۸ \div ۲ = ۴ \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} ۸ - ۴ - ۳ \longrightarrow (۸ - ۴) - ۲ = ۴ - ۲ = ۲ \\ ۸ - ۴ - ۲ \longrightarrow ۸ - (۴ - ۲) = ۸ - ۲ = ۶ \end{array}\right.$$

برای محاسبه عباراتی از این دست که پرانتزگذاری نشده‌اند، دو قاعده داریم.

۱ ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق مقدم هستند.
۲ محاسبه از چپ به راست صورت می‌گیرد.

توجه: قاعدهٔ اول بر قاعده دوم مقدم است. اول قاعدهٔ اول را اِعمال کرده و سپس قاعدهٔ دوم را اعمال می‌کنیم. بنابراین عبارات فوق باید از چپ به راست محاسبه شوند. یعنی پرانتزگذاری به‌صورت زیر انجام می‌شود.

$$۸ \div ۴ \div ۲ \longrightarrow (۸ \div ۴) \div ۲ = ۲ \div ۲ = ۱ \qquad ۸ - ۴ - ۲ \longrightarrow (۸ - ۴) - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

مثال زیر در روشن شدن این مطلب به‌شما کمک خواهد کرد.

مثال ۲۶.۱: عبارات زیر را با پرانتزگذاری مناسب (براساس قواعد فوق) محاسبه نمایید.

آ. $۱۲ - ۱۰ - ۱$ ب. $۱۶ \div ۴ \div ۲$
ج. $۱۶ \div ۴ - ۲$ د. $۱۶ - ۴ \div ۲$
ه. $۸ \times ۴ \div ۲$ و. $۸ \div ۴ \times ۲$

پاسخ: آ. $(۱۲ - ۱۰) - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$ د. $۱۶ - (۴ \div ۲) = ۱۶ - ۲ = ۱۴$
موارد دیگر، به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۴.۴.۱ تفریق و تقسیم در معادلات

در معادلات می‌توان از تفریق نیز استفاده کرد و با استفاده از تعریف تفریق ، آن را به معادله‌ای جمعی تبدیل نمود و مانند قبل حل کرد. در مثال (۲۷.۱) با این‌گونه معادلات و در مثال (۲۸.۱) با اشتباه منطقی رایجی در حل آنها آشنا خواهید شد.

حل این معادلات برای اکثر خوانندگان کتاب ساده است. به دنبال راه اصولی حل این‌گونه معادلات هستیم تا در موارد پیچیده نیز کار ساده باشد. روش حل خود را با پاسخ مقایسه کنید.

مثال ۲۷.۱: معادلات زیر را حل کنید.

آ. $x - ۳ = ۴$ ب. $۴ - x = ۲$ ج. $(x - ۳) - ۲ = ۵$
د. $(۹ - ۳) - x = ۴$ ه. $(۸ - x) - ۲ = ۱$ و. $۸ - (۵ - x) = ۶$

پاسخ: روش حل این معادلات را به اختصار بیان می‌کنیم.

آ. $x - ۳ = ۴ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x = ۳ + ۴ \Longrightarrow x = ۷$

ب. $۴ - x = ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} ۴ = ۲ + x \Longrightarrow ۲ + ۲ = x + ۲ \Longrightarrow x = ۲$

ج. $(x - ۳) - ۲ = ۵ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x - ۳ = ۵ + ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تفریق}} x = (۵ + ۲) + ۳ = ۱۰$

د. $(۹ - ۳) - x = ۴ \Longrightarrow ۶ - x = ۴ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۲$

ه. $(۸ - x) - ۲ = ۱ \Longrightarrow ۸ - x = ۱ + ۲ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۵$

و. $۸ - (۵ - x) = ۶ \Longrightarrow ۸ = ۶ + (۵ - x) \Longrightarrow ۶ + ۲ = ۶ + (۵ - x)$
$\Longrightarrow ۲ = ۵ - x \Longrightarrow ۵ = ۲ + x \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x = ۳$ ■

دقت کنید؛ هرچند برخی روش‌ها در حل معادلاتی که شامل تفریق هستند به جواب می‌رسند، اما قابل قبول نیستند. در مثال زیر یک نمونه از این روش‌ها را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۲۸.۱: شخصی معادلهٔ $۷ - x = ۴$ را به صورت زیر حل می‌کند:

$$۷ - x = ۴ \Longrightarrow ۷ = ۴ + x \Longrightarrow x = ۷ - ۴$$

اما شخص دیگری به او خُرده می‌گیرد که $۷ - ۴$ به‌معنای جواب معادلهٔ $۴ + x = ۷$ است و تو برای بدست آوردن جواب معادله، از محاسبهٔ $۷ - ۴$ استفاده کرده‌ای. حال که می‌خواهی مقدار $۷ - ۴$ را حساب کنی، باید به همان معادله باز گردی. بنابراین، نمی‌توان یک عدد را به‌عنوان جواب این معادله و حاصل تفریق به‌دست آورد.

شخص دوم درست می‌گوید. شخص اول برای حل این معادله از محاسبه $۷ - ۴$ استفاده می‌کند چون مقدار آن را از قبل می‌داند؛ اما اگر مقدار $۷ - ۴$ را از قبل نداند نمی‌تواند از این روش استفاده کند. برای اعداد کوچک به‌همین روشی که دیدیم حاصل‌ها را محاسبه نموده و به‌خاطر می‌سپاریم. اما برای اعداد بزرگ، روش‌های محاسبه‌ای را می‌سازیم که به «حساب» شهرت دارند. در فصل بعد با این روش‌ها آشنا خواهیم شد. ■

معادلاتی که شامل تقسیم هستند را می‌توان با استفاده از تعریف تقسیم، به معادلاتی ضربی تبدیل نمود و حل کرد. در مثال زیر به بیان چند نمونه از این معادلات می‌پردازیم.

مثال ۲۹.۱: معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $\frac{x}{۳} = ۵$ ب. $\frac{x}{۳} = ۰$ ج. $\frac{۸}{x} = ۲$

د. $\frac{۳}{x} = ۰$ ه. $\frac{x+۵}{۴} = ۳$ و. $\frac{x+۴}{۳} = \frac{x+۱}{۲}$

پاسخ: آ. $\frac{x}{۳} = ۵ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = ۵ \times ۳ \Longrightarrow x = ۱۵$

ب. $\frac{x}{۳} = ۰ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x = ۰ \times ۳ \Longrightarrow x = ۰$

ج. $\frac{۸}{x} = ۲ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۸ = ۲ \times x \Longrightarrow ۲ \times ۴ = ۲ \times x \Longrightarrow x = ۴$

د. $\frac{۳}{x} = ۰ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۳ = ۰ \times x \Longrightarrow$ این معادله جواب ندارد.

ه. $\frac{x+۵}{۴} = ۳ \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x + ۵ = ۳ \times ۴ = ۱۲ = ۷ + ۵ \Longrightarrow x = ۷$

و. $\frac{x+۴}{۳} = \frac{x+۱}{۲} \xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} x + ۴ = \frac{x+۱}{۲} \times ۳ \Longrightarrow x + ۴ = \frac{۳ \times (x+۱)}{۲}$

$\xRightarrow{\text{تعریف تقسیم}} ۲(x+۴) = ۳(x+۱) \Longrightarrow \ \dots \ \Longrightarrow x = ۵$

■

با دقت بخوانید
این نکتهٔ ظریف عدّهٔ زیادی را به اشتباه می‌اندازد.

مثال ۳۰.۱: شخصی معادلهٔ $\frac{x}{x+۲} = \frac{x}{x+۱}$ را به صورت زیر حل می‌کند :

$$\frac{x}{x+۱} = \frac{x}{x+۲} \Longrightarrow x(x+۲) = x(x+۱) \xRightarrow{\text{حذف ضرب}} x + ۲ = x + ۱$$

و نتیجه می‌گیرد که این معادله جواب ندارد. اما با جایگذاریِ $x = ۰$ مشخص می‌شود $x = ۰$ یک جواب معادله است. اشتباه این شخص را بیابید.

پاسخ: برای استفاده از خاصیت حذف ضرب، شرط $x \neq ۰$ ضروری است. به‌همین جهت باید مسئله را حالت‌بندی کرد. حالت اول $x \neq ۰$ که بررسی شد و حالت دیگر $x = ۰$ که با قراردادن آن در معادله مشخص می‌شود $x = ۰$ یک جواب معادله است. ■

۵.۴.۱ تفریق و تقسیم در نامعادلات

دقت کنید! نکته‌ای مهم که از اشتباهی بسیار رایج جلوگیری می‌کند.

با بیان یک مثال وارد این بحث می‌شویم. برای حل نامعادلهٔ $x - ۴ < ۳$، از قضیه (۱.۱) مورد (د)، داریم$۴ + ۳ > ۴ + (x - ۴)$. از طرفی، بنابه تعریف تفریق داریم $x = ۴ + (x - ۴)$. بنابراین، $x < ۷$.
ما اظهار داشته‌ایم، اگر $x - ۴ < ۳$، آن‌گاه $x < ۷$. بنابراین می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $x - ۴ < ۳$ در میان جواب‌های $x < ۷$ قرار دارد. اما آیا همهٔ اعداد $x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ جواب‌های نامعادلهٔ $x - ۴ < ۳$ هستند؟ به وضوح اگر $x \ngeq ۴$، تفریق $x - ۴$ بی‌معنا خواهد بود. بنابراین جواب‌های این نامعادله، $۴ \leq x < ۷$ می‌باشد. یعنی $x = ۴, ۵, ۶$.

مثال ۳۱.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $۸ - x \leq ۶$ ب. $x - ۷ \leq ۳$ ج. $۶ - x \leq x$

پاسخ: استدلال‌ها را به اختصار بیان می‌کنیم.

آ. $\left.\begin{array}{l} ۸ - x \leq ۶ \Longrightarrow (۸ - x) + x \leq ۶ + x \Longrightarrow ۸ \leq ۶ + x \Longrightarrow ۲ \leq x \\ ۸ - x \geq ۰ \Longrightarrow x \leq ۸ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۲ \leq x \leq ۸$

ب. $\left.\begin{array}{l} x - ۷ \leq ۳ \Longrightarrow (x - ۷) + ۷ \leq ۳ + ۷ \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow x \leq ۱۰ \\ x - ۷ \geq ۰ \Longrightarrow x \geq ۷ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۷ \leq x \leq ۱۰$

ج. $\left.\begin{array}{l} ۶ - x \leq x \Longrightarrow (۶ - x) + x \leq x + x \Longrightarrow ۲ \times ۳ \leq ۲x \Longrightarrow x \geq ۳ \\ ۶ - x \geq ۰ \Longrightarrow x \leq ۶ \end{array}\right\} \Longrightarrow ۳ \leq x \leq ۶$

■

برای حل نامعادلهٔ $x \div ۴ \geq ۳$ که شامل تقسیم است، کافی است استدلال کنیم:

$$\frac{x}{۴} \geq ۳ \Longrightarrow \left(\frac{x}{۴}\right) \times ۴ \geq ۳ \times ۴ \Longrightarrow x \geq ۱۲$$

اما از طرفی هم باید تقسیم $x \div ۴$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، پس باید x مضرب ۴ باشد. بنابراین جواب‌های معادله، مضارب ۴ هستند که بزرگتر یا مساوی ۱۲ باشند. یعنی $x = ۱۲, ۱۶, ۲۰, \ldots$.

توجه!..........توجه! فریب ظاهر سادهٔ این مثال را نخورید. اگر به‌نظرتان بیش از حد ساده است، پاسخ را ببینید.

مثال ۳۲.۱: نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $۸ \div x \geq ۲$ ب. $۸ \div x \leq ۸$

با دقت بخوانید...

پاسخ: آ. اولاً با توجه به تعریف تقسیم، داریم $x \neq ۰$ و در ادامه نیز می‌توانیم از تعریف تقسیم و خواص ضرب اعداد طبیعی استفاده کرده و به‌صورت زیر استدلال کرد:

$$\frac{۸}{x} \geq ۲ \Longrightarrow ۸ \geq ۲ \times x \Longrightarrow \frac{۸}{۲} \geq x \Longrightarrow x \leq ۴$$

پس جواب‌های معادله در میان $x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ است. اما باید $\frac{۸}{x}$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد. بنابراین $x = ۱, ۲, ۴$ جواب‌های این معادله هستند.

ب . مشابه مورد قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم $x \neq ۰$ و

$$\frac{۸}{x} \leq ۸ \Longrightarrow ۸ \leq ۸ \times x \Longrightarrow \frac{۸}{۸} \leq x \Longrightarrow x \geq ۱$$

اما از طرفی هم باید تقسیم $x \div ۸$ در اعداد طبیعی بامعنا باشد. درنتیجه باید ۸ مضربی از x باشد، پس $x \leq ۸$ پس برای یافتن جواب‌های نامساوی، باید میان xهایی که $۱ \leq x \leq ۸$ به دنبال اعدادی باشیم که ۸ مضرب طبیعی آنهاست. بنابراین، هر یک از اعداد $x = ۱, ۲, ۴, ۸$ جوابی برای این نامساوی است. ■

تمرین:

صرفاً برای خواننده مبتدی...

(۳۰) حاصل تفریق‌های زیر را با استفاده از تعریف (۴.۱) و با استفاده از محور اعداد به‌دست آورید.

آ . $۳ - ۲$ ب . $۴ - ۱$ ج . $۶ - ۶$

د . $۸ - ۸$ ه . $۳ - ۴$ و . $۲ - ۵$

اگر فهمیده باشید، چند ثانیه بیشتر زمان نمی‌برد.

(۳۱) عبارات زیر را کامل کنید.

آ . $... = (۲ \div ۱۰)$ زیرا $۱۰ = ... \times ...$ ب . $... = \frac{۰}{۷} \div ۰$ زیرا $۰ = ... \times ...$

ج . $۴ = \left(\frac{...}{۳}\right)$ زیرا $... = ۳ \times ...$ د . $۳ = \frac{۱۸}{...}$ زیرا $... = ... \times ...$

هدف محاسبات ذهنی با تکیه بر خواص اعداد است.

(۳۲) حاصل عبارات زیر را با استفاده از قاعدهٔ توزیع‌پذیری به‌دست آورید.

آ . $۱۶ \times ۴۷ + ۱۶ \times ۲۳ =$ ب . $۱۲ \times ۱۴ + ۱۳ \times ۱۴ =$

ج . $۳۷ \times ۴۹۷ - ۳۷ \times ۴۹۶ =$ د . $۲۴۷ \times ۲۵ - ۱۴۷ \times ۲۵ =$

(۳۳) نشان دهید اگر $a - b$ و c اعدادی طبیعی باشند، آنگاه $(a + c) - b$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۴) نشان دهید اگر $(a - b) - c$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $(a - c) - b$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۵) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ . اگر $a + (b - c)$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $(a + b) - c$ نیز عددی طبیعی است.

ب . اگر $(a + b) - c$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $a + (b - c)$ نیز عددی طبیعی است.

(۳۶) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ . $۷ - (۴ - ۲) = (۷ - ۴) - ۲$ ب . $a - (b - c) = (a - b) - c$

ج . عمل تفریق در اعداد طبیعی دارای شرکت‌پذیری است.

(۳۷) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. (با استفاده از تعریف شهودی و محور اعداد)

آ . $۴ - ۳ = ۳ - ۴$ ب . $a - b = b - a$

ج . عمل تفریق دارای خاصیت جابجایی است.

(۳۸) اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، از تساوی $a - b = b - a$ کدام عبارات زیر نتیجه می‌شوند؟

آ . $a = ۰$ ب . $b = ۰$ ج . $a = b$ د . $a = b = ۰$

(۳۹) $a + b$ و a مضارب ۴ هستند. نشان دهید b نیزمضرب ۴است.

(۴۰) اگر x مضرب ۳ باشد، نشان دهید $(۳ + ۱)(x + ۲) + ۱$ نیزمضرب ۳ است.

جهت خوانندگان مبتدی...

(۴۱) هر یک از عبارات زیر را پس از پرانتزگذاری، محاسبه کنید.

آ . $۳ + ۲ \times ۵$ ب . $۹ - ۶ \div ۳$ ج . $۸ \div ۴ \div ۲$ د . $۶ \div ۳ \times ۲$

کار با تعریف را تمرین کنید. اگر فهمیده باشید هر مورد فقط چندثانیه زمان می‌برد.

(۴۲) در هر یک از موارد زیر تعیین کنید از کدام تعریف یا قضیه استفاده شده است.

آ . $۳ + ۴ = ۷ \Longrightarrow ۳ = ۷ - ۴$

ب . $۳ \times (۸ \div ۲) = (۳ \times ۸) \div ۲$

ج. $۳ \times ۴ = ۱۲ \Longrightarrow ۴ = ۱۲ \div ۳$

از نگارش تقسیم به‌صورت کسری کمک بگیرید.

د. $۸ \div ۴ = ۶ \div ۳ \Longrightarrow ۸ \times ۳ = ۶ \times ۴$

ه. $۳x = ۱۸ \Longrightarrow x = ۱۸ \div ۳$

و. $(۱۲ \div ۴) \times (۱۰ \div ۵) = (۱۲ \times ۱۰) \div (۴ \times ۵)$

ز. $(۱۶ \div ۴) + (۱۲ \div ۴) = (۱۶ + ۱۲) \div ۴$

ح. $(۱۶ \div ۴) + (۱۲ \div ۳) = (۱۶ \times ۳ + ۱۲ \times ۴) \div (۴ \times ۳)$

ط. $(۱۵ \div ۳) \times (۱۲ \div ۴) = (۱۵ \times ۱۲) \div (۳ \times ۴)$

به بامعنا بودن عبارات در اعداد طبیعی توجه کنید.
از نگارش تقسیم به‌صورت کسری کمک بگیرید.

(۴۳) درستی تساوی‌های زیر در اعداد طبیعی را نشان دهید.

آ. $(۲۰ \div ۵) - (۱۵ \div ۵) = (۲۰ - ۱۵) \div ۵$

ب. $۱۲ \div ۴ - ۸ \div ۴ = (۱۲ - ۸) \div ۴$

ج. $(۲۰ \div ۴) - (۱۵ \div ۳) = (۲۰ \times ۳ - ۱۵ \times ۴) \div (۴ \times ۳)$

د. $۱۵ \div ۳ - ۱۶ \div ۸ = (۱۵ \times ۸ - ۱۶ \times ۳) \div (۳ \times ۸)$

ه. $(۱۲ \div ۲) \div (۶ \div ۳) = (۱۲ \times ۳) \div (۶ \times ۲)$

با تکیه بر تمرینات قبل و مثال‌های متن کتاب ساده خواهند بود.

(۴۴) چرا تساوی‌های زیر در اعداد طبیعی نادرست هستند؟

آ. $(۱۲ \div ۳) \times (۱۵ \div ۴) = (۱۲ \times ۱۵) \div (۳ \times ۴)$

ب. $(۱۵/۴) + (۵ \div ۴) = ۲۰ \div ۴$

ج. $۱۲/۵ \div ۱۵/۴ = (۱۲ \times ۱۵)/(۵ \times ۴)$

بسیار پایه‌ای!

(۴۵) در خوش تعریفی ضرب دیدیم که در اعداد طبیعی از $a = b$ می‌توان نتیجه گرفت $ac = bc$.

آ. آیا می‌توان از $a.c = b.c$ نتیجه گرفت $a = b$؟

ب. آیا تقسیم خوش‌تعریف است؟

اگر فهمیده باشید هر مورد فقط چند ثانیه زمان می برد.
موارد مختلف را با هم مقایسه کنید.

(۴۶) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند، $\frac{ac}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ب. آیا عکس مورد (آ) نیز درست است؟ (یعنی اگر $\frac{ac}{bd}$ با معنا باشد آن‌گاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نیز با معنا خواهند بود؟)

ج. اگر $\frac{a}{c}$ و a اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $\frac{ab}{c}$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

د. آیا عکس مورد (ج) نیز درست است؟

ه. اگر $(a \div b)$ و $(a \div c)$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشد، آن‌گاه $a \div (b + c)$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

و. اگر $a \div c$ و $b \div c$ در $\mathbb{N}$ بامعنا باشند، آن‌گاه $(a + b) \div c$ نیز در $\mathbb{N}$ بامعنا است.

ز. اگر $a \div c$ و $b \div c$ اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $(b - a) \div c$ نیز عددی طبیعی است.

ح. اگر $a \div c$، $b \div c$ و $b - c$ اعدادی طبیعی باشند، $(a - b) \div c$ نیز عددی طبیعی است.

ط. اگر $a \div c$، $b \div c$ و $b - c$ اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه

$$(a \div c) - (b \div c) = (a - b) \div c$$

صورت تمرینات مهم هستند.

(۴۷) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند آن‌گاه $\frac{bc+ad}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ب. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشند، $\frac{ad-bc}{bd}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا است.

ج. اگر $\frac{bc+ad}{bd}$ در $\mathbb{N}$ با معنا باشد، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نیز در $\mathbb{N}$ با معنا هستند.

بسیار مهم و اساسی! پاسخ خود را با پاسخنامه مقایسه کنید.

(۴۸) درستی یا نادرستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

آ. $۳(۵-۲) = ۱۵-۶$

ب. $۲(\frac{۱۲}{۴} - \frac{۱۶}{۸}) = \frac{۲\times ۱۲}{۴} - \frac{۲\times ۱۶}{۸}$

ج. $\frac{۱۲}{۳} \times (۵-۳) = \frac{۱۲\times ۵}{۳} - \frac{۱۲\times ۳}{۳}$

د. $(۱۵\div ۵)(۴-۶) = (۱۵\times ۴ - ۱۵\times ۶)\div ۵$

توجه! به بامعنا بودن عبارت توجه کنید.

(۴۹) معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x+۴=۷$ ب. $۵x=۰$ ج. $x-۴=۵$

د. $۴x=۱۶$ ه. $۵x+۴=۱۹$ و. $۳x+۲x=۳۰$

ز. $۵x-۳x=۸$ ح. $x+۵=۲x$ ط. $۲x-۴=x$

ی. $۳x+۵=۲x+۸$ ک. $۳(x-۴)=۲(x-۳)$ ل. $۴(x+۳)=۶(x-۲)$

م. $۲x(x-۱)=x(۲x-۱)$ ن. $\frac{۴(x+۳)}{۵x-۱}=۶$ س. $\frac{(۲x-۱)}{x}=\frac{۲x}{x}$

ع. $\frac{۲x-۱}{x}=۲$ ف. $\frac{۲x-۱}{x}=۲$ ص. $\frac{x+۳}{x-۲}=\frac{۶}{۴}$

مثال (۳۱.۱) را به یاد آورید...

(۵۰) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ. $x-۳<۷$ ب. $x-۵>۴$ ج. $x-۳\geq ۲$ د. $x-۲\leq ۷$

ه. $۵-x<۱$ و. $۵-x\leq ۴$ ز. $۹-x\geq ۳$ ح. $۵-x\geq ۴$

ط. $۴-x\geq ۴$ ی. $۶-x>۶$

بسیار مهم! از تعاریف استفاده کنید.

(۵۱) نشادن دهید در اعداد طبیعی در صورت با معنا بودن تفریق‌ها و تقسیم‌ها داریم:

آ. $a<b$ اگر و تنها اگر $a-c<b-c$ ب. $a<b$ اگر و تنها اگر $c-a>c-b$

ج. $a<b$ اگر و تنها اگر $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ د. $a<b$ اگر و تنها اگر $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

۵.۱ توان

صرفاً جهت یادآوری اگر با توان آشنایی دارید می‌توانید از خواندن این مطالب صرف نظر کنید. تا تعریف (۱.۵)

در ابتدا برای خلاصه‌نویسی عبارتی مانند $۳\times ۳\times ۳\times ۳$ که به حاصل‌ضرب ۴تا ۳ اشاره دارد، از عبارت $۳^۴$ استفاده می‌کنیم و می‌خوانیم «۳ به‌توانِ ۴». در این عبارت، ۳ را «پایه» و ۴ را «نما» گوییم. به‌طور مشابه برای هر عدد طبیعی مانند a می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a^۲ &= a\times a\\ a^۳ &= a\times a\times a\\ a^۴ &= a\times a\times a\times a\\ &\vdots \end{aligned}$$

توجه داریم که در این تعبیر، $a^۰$ و $a^۱$ بی‌معنا هستند؛ چون حاصل‌ضرب ۱ عدد a یا حاصل‌ضرب صفر عدد a در خودش بی‌معناست. بنابراین، با این تعبیر، a^n فقط برای $n\geq ۲$ بامعناست و هنوز معنایی برای $a^۰$ و $a^۱$ درنظر گرفته نشده است.

مثال ۳۳.۱: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. $۰^{۲}$	ب. $۰^{۳}$	ج. $۰^{۴}$
د. $۱^{۲}$	ه. $۱^{۳}$	و. $۱^{۴}$
ز. $۲^{۲}$	ح. $۲^{۳}$	ط. $۲^{۴}$
ی. $۳^{۲}$	ک. $۳^{۳}$	ل. $۳^{۴}$
م. $۴^{۲}$	ن. $۴^{۳}$	س. $۴^{۴}$

پاسخ: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۴.۱: نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند a داریم:

آ. $a^{۴} \times a^{۳} = a^{۷}$ ب. $a^{۳} \times b^{۳} = (ab)^{۳}$ ج. $(a^{۲})^{۳} = a^{۳\times۲}$

پاسخ: آ. $$a^{۴} \times a^{۳} = \underbrace{\overbrace{(a\times a\times a\times a)}^{\text{۴تا}a} \times \overbrace{(a\times a\times a)}^{\text{۳تا}a}}_{\text{(۴+۳)تا}a} = a^{(۴+۳)} = a^{۷}$$

ب. $$a^{۳} \times b^{۳} = \overbrace{(a\times a\times a)}^{a\text{ ۳ تا}} \times \overbrace{(b\times b\times b)}^{b\text{ ۳ تا}} = \overbrace{(ab)\times(ab)\times(ab)}^{(ab)\text{ ۳ تا}} = (ab)^{۳}$$

ج. $$(a^{۲})^{۳} = \overbrace{a^{۲}\times a^{۲}\times a^{۲}}^{a^{۲}\text{ ۳ تا}} = \underbrace{\overbrace{(a\times a)}^{a\text{ ۲ تا}} \times \overbrace{(a\times a)}^{a\text{ ۲ تا}} \times \overbrace{(a\times a)}^{a\text{ ۲ تا}}}_{a\text{ (۳×۲) تا}} = a^{۳\times۲} = a^{۶}$$ ■

مثال ۳۵.۱: نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، m و n که $m, n \geq ۲$ داریم:

آ. $a^{n} \times a^{m} = a^{m+n}$ ب. $a^{n} \times b^{n} = (ab)^{n}$ ج. $(a^{m})^{n} = a^{m\times n}$

پاسخ: آ. $$a^{m} \times a^{n} = \underbrace{\overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }m} \times \overbrace{(a\times\cdot\times a)}^{a\text{ تا }n}}_{a\text{ تا }(m+n)} = a^{m+n}$$

ب. $$a^{n} \times b^{n} = \overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }n} \times \overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{\text{تا}} = \overbrace{(ab)\times\cdots\times(ab)}^{a\text{ تا }n} = (ab)^{n}$$

ج. $$(a^{m})^{n} = \overbrace{a^{m}\times\cdots\times a^{m}}^{a^{m}\text{ تا }n} = \underbrace{\overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }m} \times\cdots\times \overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }m}}_{a\text{ تا }n\times m} = a^{n\times m} = a^{m\times n}$$ ■

صرفاً خواندنی ...
یکبار خواندن این مطب به تمامی خوانندگان پیشنهاد می‌شود.

ترجیح می‌دهیم $a^{۱}$ چنان باشد که قواعد ارائه شده در مثال فوق برای $m, n \geq ۱$ برقرار باشند. یعنی داشته باشیم $a^{m} \times a^{۱} = a^{m+۱}$ و $a^{۱} \times a^{n} = a^{۱+n}$. اما از طرفی هم داریم:

$$a \times a^{n} = \underbrace{a \times \overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }n}}_{a\text{ تا }(۱+n)}) = a^{۱+n} \quad \text{و} \quad a^{m} \times a = \underbrace{\overbrace{(a\times\cdots\times a)}^{a\text{ تا }m} \times a}_{a\text{ تا }(m+۱)} = a^{m+۱}$$

پس قرار می‌دهیم $a^{۱} = a$. واضح است که برای $a^{۱} \times a^{۱}$ نیز با این قرارداد داریم
$a^{۱} \times a^{۱} = a \times a = a^{۲} = a^{۱+۱}$
همچنین، می‌توان نشان داد، این قرارداد با موارد (ب) و (ج) از مثال فوق نیز همخوانی دارد. زیرا:

$$ab = a^{۱}b^{۱} = (ab)^{۱} = ab$$
$$a^{n} = (a^{n})^{۱} = a^{n\times۱} = a^{n}$$
$$a^{n} = (a^{۱})^{n} = a^{۱\times n} = a^{n}$$

آیا می‌توان a° را نیز چنان تعریف کرد که با قواعد فوق همخوانی داشته باشد؟ برای این منظور باید برای هر دو عدد طبیعی مانند a و n داشته باشیم:

$$a^n \times a^{\circ} = a^{n+\circ} = a^n$$

و درنتیجه a° باید عنصر همانی ضرب باشد. بنابراین، قرار می‌دهیم $a^{\circ} = ۱$ (برای هر عدد دلخواهی مانند a). تساوی‌های زیر نشان می‌دهند که این قرارداد با قواعد مثال فوق همخوانی دارند.

$$\begin{aligned} ۱ &= ۱ \times ۱ = a^{\circ} \times b^{\circ} = (ab)^{\circ} = ۱ \\ ۱ &= ۱^n = (a^{\circ})^n = a^{\circ \times n} = a^{\circ} = ۱ \\ ۱ &= a^{\circ} = a^{n \times \circ} = (a^n)^{\circ} = ۱ \end{aligned}$$

شخصی به ما خرده می‌گیرد که بنا به قرارداد برای هر عددی مانند a داریم $a^{\circ} = ۱$ پس $\circ^{\circ} = ۱$. اما از طرفی هم برای هر $n > \circ$ داریم $\circ^n = \circ$. بنابراین، $\circ^{\circ} = \circ$.

این شخص درست می‌گوید. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند بررسی کنند که هر دو قرارداد $\circ^{\circ} = \circ$ و $\circ^{\circ} = ۱$ با قواعد ارائه شده در مثال قبل همخوانی دارند. در برخی از کتاب‌های ریاضی $\circ^{\circ}$ را تعریف نکرده و آن را تعریف نشده می‌خوانند. در برخی کتاب‌های ریاضی نیز یکی از دو قرارداد را می‌پذیرند. اما در این کتاب، به دلایلی که خارج از حوصله این کتاب است، قرارداد $\circ^{\circ} = ۱$ را می‌پذیریم.

در ادامه، شخصی به ما خُرده می‌گیرد که ضرب بین دو عدد بامعناست و ضرب بیش از دو عدد یا ضرب یک عدد یا ضرب هیچ عدد بی‌معناست؛ به‌عبارت بهتر، دقیق نیست. این شخص نیز درست می‌گوید. برای یافتن راهکاری برای حل این مشکل، از تساوی‌های زیر ایده می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &a^{\circ} = ۱ && \\ &a^{۱} && = a = ۱ \times a && = a^{\circ} \times a \\ &a^{۲} && = a \times a && = a^{۱} \times a \\ &a^{۳} && = a \times a \times a && = a^{۲} \times a \\ & && \vdots && \vdots \end{aligned}$$

با ایده گرفتن از تساوی‌های فوق، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

با دقت بخوانید...
این مطالب مهم هستند؛ در یادگیری آنها کوشا باشید.

تعریف ۱.۶: برای هر دو عدد طبیعی مانند a و n تعریف می‌کنیم:

آ. $a^{\circ} = ۱$ **ب. $a^{n+۱} = a^n \times a$**

بدین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} a^{\circ} &= ۱ && = ۱ \\ a^{۱} &= a^{\circ} \times a = ۱ \times a && = a \\ a^{۲} &= a^{۱} \times a && = a \times a \\ a^{۳} &= a^{۲} \times a && = (a \times a) \times a \\ a^{۴} &= a^{۳} \times a && = \big((a \times a) \times a\big) \times a \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

در تعریف فوق که مانند تعاریف جمع و ضرب، یک تعریف بازگشتی است، روش محاسبه‌ای مطرح می‌شود که در آن برای محاسبهٔ a^{n+1} باید به محاسبهٔ a^n رجوع کرده و به همین تعریف بازگشت.

مثال ۳۶.۱: مقادیر زیر را به‌دست آورید.

آ. 5^0 ب. 3^1 ج. 7^3 د. 0^3

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۳۷.۱: با استفاده ازتعریف نشان دهید:

با دقت بخوانید...
«استقرای ریاضی» را بیاموزید.

آ. $a^n \times a^0 = a^{n+0}$ ب. $a^n \times a^1 = a^{n+1}$
ج. $a^n \times a^2 = a^{n+2}$ د. $a^n \times a^3 = a^{n+3}$

پاسخ: آ. $a^n \times a^0 = a^n \times 1 = a^n = a^{n+0}$

ب. $a^n \times a^1 = a^n \times a = a^{n+1}$

ج. $a^n \times a^2 = a^n \times (a^1 \times a) = \left(a^n \times a^1\right) \times a = a^{n+1} \times a = a^{n+2}$؛ بنا به مورد (ب)

د. $a^n \times a^3 = a^n \times (a^2 \times a) = (a^n \times a^2) \times a = a^{n+2} \times a = a^{n+3}$؛ بنا به مورد (ج) ■

مثال فوق این ایده را مطرح می‌کند که به همین روش می‌توان از $a^n \times a^3 = a^{n+3}$ نتیجه گرفت $a^n \times a^4 = a^{n+4}$ و سپس از این تساوی اخیر نتیجه گرفت $a^n \times a^5 = a^{n+5}$.

$$\begin{array}{ll} P(0): & a^n \times a^0 = a^{n+0} \\ P(1): & a^n \times a^1 = a^{n+1} \\ P(2): & a^n \times a^2 = a^{n+2} \\ P(3): & a^n \times a^3 = a^{n+3} \\ \vdots & \vdots \\ P(k): & a^n \times a^k = a^{n+k} \end{array}$$

در واقع، اگر جملهٔ $a^n \times a^0 = a^{n+0}$ را با $P(0)$ نمایش دهیم و از $P(1)$ برای نشان دادن $a^n \times a^1 = a^{n+1}$ استفاده کنیم، می‌بینیم که می‌توان از $P(0)$، درستی $P(1)$ را نتیجه گرفت. به‌طور مشابه می‌توان از $P(1)$ نتیجه گرفت $a^n \times a^2 = a^{n+2}$ که آن را با $P(2)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور کلی اگر برای هر عدد طبیعی مانند k، جملهٔ $a^n \times a^k = a^{n+k}$ را با $P(k)$ نمایش دهیم، می‌بینیم که با استدلال زیر می‌توان از $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+1)$ نیز درست است.

$$a^n \times a^{k+1} = a^n \times (a^k \times a) = (a^n \times a^k) \times a$$

که بنا به درستی $P(k)$ داریم:

$$(a^n \times a^k) \times a = a^{n+k} \times a = a^{(n+k)+1} = a^{n+(k+1)}$$

بنابراین، عبارت $a^n \times a^{k+1} = a^{n+(k+1)}$ درست است که با $P(k+1)$ نمایش داده می‌شود. بدین‌ترتیب، با قرار دادن $k = 0$، می‌توان از $P(0)$، جملهٔ $P(1)$ را نتیجه گرفت و همچنین می‌توان با قرار دادن $k = 1$ نیز از $P(1)$ نتیجه گرفت $P(2)$ درست است. با ادامه همین روند داریم:

$$P(0) \xrightarrow{k=0} P(1) \xrightarrow{k=1} P(2) \xrightarrow{k=2} P(3) \xrightarrow{k=3} P(4) \Longrightarrow \dots$$

واضح است که برای هر عدد طبیعی مانند m می‌توان این روند را آن‌قدر ادامه داد تا به m رسید. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت چون $P(0)$ درست است پس برای هر عدد طبیعی مانند m نیز $P(m)$ درست است. این نوع استدلال را «استقرای ریاضی» گوییم. در استقرای ریاضی برای اینکه نشان دهیم جملهٔ $P(m)$ برای هر عدد طبیعی دلخواهی مانند m درست است، نشان می‌دهیم $P(0)$ درست است و برای هر عدد طبیعی مانند k، می‌توان از $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+1)$ نیز درست است.

با دقت بخوانید...
صورت قضیه و اثبات آن، هر دو مهم هستند.

قضیه ۶.۱: برای اعداد طبیعیِ دلخواهِ a، b، m و n داریم:

آ. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ب. $a^n \times b^n = (ab)^n$ ج. $(a^m)^n = a^{mn}$

د. $a^n \div a^m = a^{n-m}; (n \geq m)$ ه. $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

با اثبات موارد دیگر، استقرای ریاضی را تمرین کنید.

اثبات: آ. با توجه به توضیحات قبل به استقرای ریاضی اثبات می شود.

ب. جملهٔ $P(k)$ را به‌معنای $a^k b^k = (ab)^k$ در نظر می‌گیریم. به‌ضوح $P(0)$ درست است چون $P(0)$ به‌معنای $a^0 b^0 = (ab)^0$ می‌باشد که هر دو طرف برابر ۱ هستند.
کافی است نشان دهیم برای هر عدد طبیعی مانند k، اگر $P(k)$ درست باشد، $P(k+1)$ نیز درست است که با استدلال زیر انجام می‌شود.
فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است. یعنی $a^k b^k = (ab)^k$ و نشان می‌دهیم $a^{k+1} b^{k+1} = (ab)^{k+1}$.

$$a^{k+1} b^{k+1} = (a^k a)(b^k b) = (a^k b^k)(ab) = (ab)^k (ab) = (ab)^{k+1}$$

ج. جملهٔ $P(k)$ را به‌معنای «برای هر عدد طبیعی مانند m داریم $(a^m)^k = a^{mk}$» در نظر می‌گیریم. واضح است که $P(0)$ درست است. استدلال زیر نشان می‌دهد اگر $P(k)$ درست باشد، $P(k+1)$ نیز درست است و به استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم برای هر عددی مانند n داریم «برای هر عدد طبیعی مانند m، $(a^m)^n = a^{mn}$» که همان عبارت فوق است.

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m = a^{mk} a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$$

موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه فوق به ما کمک می‌کند برخی عبارت‌های توان‌دار را به صورت a^n بنویسیم که آن را ساده‌کردن گوییم. به‌طورِ مثال، عبارت $7^9 \times 7^5$ را می‌توان به صورت 7^{14} نوشت و ساده کرد؛ چون $7^{5+9} = 7^{14}$.

مثال ۳۸.۱: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ. $2^{19} \times 2^{21}$ ب. $2^{73} \times 3^{73}$ ج. $(2^3)^5$

د. $9^5 \times 3^7$ ه. $8^2 \times 2^8$ و. $8^4 \times 4^5$

ز. $7^{15} \div 7^8$ ح. $7^{23} \div 49^{11}$ ط. $8^5 \times 4^7 \div 16^7$

پاسخ: آ. $2^{40} = 2^{19+21} = 2^{21} \times 2^{19}$ ب. $2^{73} \times 3^{73} = (2 \times 3)^{73} = 6^{73}$ ج. $(2^3)^5 = 2^{3\times 5} = 2^{15}$

د. $9^5 \times 3^7 = (3^2)^5 \times 3^7 = 3^{2\times 5} \times 3^7 = 3^{10} \times 3^7 = 3^{17}$

ه. $8^2 \times 2^8 = (2^3)^2 \times 2^8 = 2^{2\times 3} \times 2^8 = 2^6 \times 2^8 = 2^{6+8} = 2^{14}$

و. $8^4 \times 4^5 = (2^3)^4 \times (2^2)^5 = 2^{12} \times 2^{10} = 2^{22}$

ز. $7^{15} \div 7^8 = 7^{15-8} = 7^7$

ح. $7^{23} \div 49^{11} = 7^{23} - (7^2)^{11} = 7^{23} \div 7^{22} = 7^{23-22} = 7^1 = 7$

ط. $8^5 \times 4^7 \div 16^7 = (8^5 \times 4^7) \div 16^7 = (2^{3\times 5} \times 2^{2\times 7}) \div 2^{4\times 7} = 2^{15+14} \div 2^{28} = 2^{29-28}$ ■

نکته‌ای ظریف...
دامی برای آنان که فکر می‌کنند ریاضی می‌دانند...

مثال ۳۹.۱: شخصی ادعا می‌کند 0^0 بی‌معناست؛ چون اگر خاصیت (د) از قضیهٔ فوق درست باشد، داریم:

$$0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$$

تقسیم بر صفر بی‌معنا است پس 0^0 نیز بی‌معنا است. آیا استدلال این شخص درست است؟

پاسخ: استدلال این شخص نادرست است. چون برای استفاده از مورد (د) از قضیهٔ فوق، باید به شرط $a \neq 0$ نیز توجه کرد که در این صورت استدلال فوق قابل اجرا نیست. ■

با دقت بخوانید.
این قسمت حاوی نکات مهمی است.

نکته ۱.۱: یک اشتباه رایج آن است که بین + و × تفاوت قائل نشویم.

به‌طور مثال ممکن است شخصی بنویسد $۳^۷ = ۳^۴ + ۳^۳$ اما نادرستی این تساوی با محاسبه مقادیر دیده می‌شود.

$$۳^۳ = ۲۷ \,,\; ۳^۴ = ۸۱ \,,\; ۳^۷ = ۲۱۸۷$$

$$۳^۳ + ۳^۴ = ۲۷ + ۸۱ = ۱۰۸ \neq ۲۱۸۷ = ۳^۷$$

اما برای محاسبهٔ عبارت فوق می‌توان از $۳^۳$ فاکتور گرفت. در این صورت داریم:

$$۳^۳ + ۳^۴ = ۳^۳ + (۳ \times ۳^۳) = (۱ + ۳)۳^۳ = ۴ \times ۳^۳$$

بنابراین، تساویِ $۳^۳ \times ۴ = ۳^۴ + ۳^۳$ درست است.
برای جمع و تفریق عبارات توان‌دار قاعدهٔ خاصی وجود ندارد. فقط وقتی پایه‌ها برابر باشند، از پایه‌ها با توان کوچک‌تر فاکتور گرفته سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

دقت کنید...
این مثال به‌ظاهر ساده، شما را در حل کردن مسائلی بسیار پیچیده یاری خواهد کرد.

مثال ۴۰.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. (از خواص توان استفاده کنید)

آ. $۴^۵ = ۲^{۱۰}$ ب. $۴^۵ + ۴^۵ = ۴^{۱۰}$ ج. $۴^۵ + ۴^۵ = ۸^۵$

د. $۲^۵ + ۲^۵ = ۲^۶$ هـ. $۹^x = ۳^{۲x}$ و. $۴^۳ - ۲^۵ = ۲^۵$

پاسخ: آ. درست   **ب**. نادرست   **ج**. نادرست

د. درست   **هـ**. درست   **و**. درست

■

توجه داریم که $۷^۲ = ۴۹$
این مثال به‌ظاهر پیچیده، به سادگی حل می‌شود.

مثال ۴۱.۱: نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند x داریم $۷^{۲x+۲} + ۴۹^x - ۷^{۲x} - ۴۹^{x+۱} = ۰$.

پاسخ: با ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$۷^{۲x+۲} + ۴۹^x - ۷^{۲x} - ۴۹^{x+۱} = ۰ = ۷^{۲x} \times ۷^۲ + ۷^{۲x} - ۷^{۲x} - ۷^{۲x} \times ۷^۲$$

که با فاکتور گیری از $۷^{۲x}$ داریم: $= ۷^{۲x}(۷^۲ + ۱ - ۱ - ۷^۲) = ۷^{۲x} \times ۰ = ۰$ ■

توجه!..........توجه!
همیشه راهی برای ساده کردن وجود **ندارد**.

توجه داریم که در مواردی مانند $۴^۳ + ۳^۳$ یا $۴^۵ + ۳^۳$ هیچ کار خاصی نمی‌توان انجام داد. یا در حالاتی مانند $۴^۵ \times ۳^۳$ نیز کار خاصی برای ساده کردن نمی‌توانیم انجام دهیم. این عبارت از این ساده‌تر نمی‌شود و تنها راه این است که مقادیر $۳^۳$ و $۴^۳$ را محاسبه نموده و جمع مذکور را انجام دهیم.

۱.۵.۱ معادلات و نامعادلات توانی

پیش از این با معادلات و نامعادلات آشنا شده‌ایم. اما معادلات و نامعادلات توانی نکات ظریفی دارند که در مثال زیر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

با دقت بخوانید...
این مثال شامل نکات ظریفی است که بی‌دقتی شما را از بین می‌برد.

مثال ۴۲.۱: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

آ. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، m و n داریم: $a^m = a^n \iff m = n$

ب. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n داریم: $a^n = b^n \iff a = b$

ج. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، m و n داریم: $a^m < a^n \iff m < n$

د. برای هر سه عدد طبیعی مانند a، b و n داریم: $a^n < b^n \iff a < b$

پاسخ: آ . نادرست است؛ چون $1^5 = 1^3$ اما $5 \neq 3$. ب . نادرست است؛ چون $5^0 = 4^0$ اما $5 \neq 4$.
ج . نادرست است؛ چون $0^0 > 0^4$ اما $0 \not> 4$. د . نادرست است؛ چون $4 > 3$ اما $4^0 \not> 3^0$. ■

مثال فوق هرچند نکات مهمی را بیان می‌کند، اما راه حلی برای معادلات و نامعادلاتی مانند $2^x < 8$ و $2^x = 8$ ارائه نمی‌کند. مثال زیر راه را برای بیان قضیه‌ای مهم هموار می‌کند که می‌توان از آن برای حل معادلات و نامعادلات استفاده کرد.

با دقت بخوانید ...
درک این مثال بدون پاسخ دادن به آن دشوار خواهد بود.

مثال ۴۳.۱: نشان دهید برای هر چهار عدد طبیعی مانند a، b، m و n داریم:
آ . اگر $a > 1$ و $n \geq 1$ آن‌گاه $a^n > 1$.
ب . برای $a > 1$ داریم اگر $n < m$ آن‌گاه $a^n < a^m$.
ج . برای $a > 0$ داریم اگر $n \leq m$ آن‌گاه $a^n \leq a^m$.
د . عبارت «اگر $a \leq b$ آن‌گاه $a^0 \leq b^0$» نادرست است.
ه . عبارت «اگر $n \leq m$ آن‌گاه $a^n \leq a^m$» درست نیست.
و . برای $n > 0$ داریم اگر $a < b$ آن‌گاه $a^n < b^n$.
ز . برای $a \geq 1$ داریم اگر $a^n < a^m$، آن‌گاه $n < m$.
ح . عبارت «اگر $a^n \leq a^m$ آن‌گاه $n \leq m$» برای $a \geq 1$ نادرست است.
ط . برای $a > 1$ داریم اگر $a^n \leq a^m$ آن‌گاه $n \leq m$.

پاسخ: آ . به استقرا روی n اثبات می‌شود. قرار می‌دهیم $\mathrm{P}(n): a^n > 1$. $\mathrm{P}(1)$ به‌وضوح درست است. اگر $\mathrm{P}(k)$ درست باشد، آن‌گاه $\mathrm{P}(k+1)$ نیز درست است؛ چون $a^{n+1} = a^n \times a > a^n \times 1 > 1 \times 1 = 1$. بنابراین، برای هر عدد طبیعی مانند $n \geq 1$ داریم $a^n > 1$.
ب . چون $n < m$، پس عددی طبیعی و ناصفر مانند k وجود دارد که $n + k = m$. بنابراین، $a^m = a^n \times a^k$. پس کافی است نشان دهیم $a^k > 1$. ادامهٔ کار به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.
موارد دیگر به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند. ■

مثال فوق امکان حل معادلات و نامعادلات را برای ما فراهم می‌آورد. اما برای یادآوری بهتر آن، حالت $a, n \geq 1$ را به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم و حالت‌هایی که مقدار a یا n صفر است را جداگانه بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۱: **برای اعدادی طبیعی و ناصفر مانند a، b، m و n داریم:**

آ . $a^n < b^n \Longrightarrow a < b$
ب . $a^m < a^n \xRightarrow{a>1} m < n$
ج . $a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b$
د . $a^m = a^n \xLeftrightarrow{a>1} m = n$

پاسخ: به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۴۴.۱: معادلات و نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

آ . $2^x < 8$
ب . $4^x \geq 16$
ج . $2^{x+1} < 16$
د . $2^{x-1} < 16$
ه . $2^{2x} \leq 16$
و . $2^{3x} \leq 16$
ز . $4^x = 16$
ح . $9^x \times 3 = 3^7$
ط . $9^x \times 3 = 9^3$

پاسخ: آ . $2^x < 2^3 \Longrightarrow x < 3 \Longrightarrow x = 0, 1, 2$؛ بنا به مورد (ب) از قضیهٔ فوق.
ب . $2^{2x} \geq 2^4 \Longrightarrow 2x \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2$؛ بنا به موارد (ب) و (ج) از قضیهٔ فوق.
ج . $2^{x+1} < 2^4 \Longrightarrow x + 1 < 4 \Longrightarrow x < 3$؛ بنا به مورد (ب) از قضیهٔ فوق.

د. $۲^{x-۱} < ۲^۴ \Longrightarrow x-۱ < ۴ \Longrightarrow x < ۴$.
اما از طرفی هم باید $x-۱$ در اعداد طبیعی بامعنا باشد و درنتیجه باید داشته باشیم $x \geq ۱$. بنابراین، $x = ۱,۲,۳$ جواب‌های این نامعادله‌اند و $x = ۰$ جواب این نامعادله نیست.

ه. $۲^{۲x} < ۲^۴ \Longrightarrow ۲x < ۴ \Longrightarrow x < ۲$.

و. $۲^۴ \leq ۲^{۳x}$ پس $۴ \leq ۳x$ و درنتیجه $۱ \leq x$. توجه داریم که جواب نامعادلهٔ $۴ \leq ۳x$ در اعداد طبیعی $۱ \leq x$، یعنی $x = ۰,۱$ است.

ز. $۲^{۲x} = ۲^۴ \Longrightarrow ۲x = ۴ \Longrightarrow x = ۲$.

ح. $۳^{۲x+۱} = ۳^۷ \Longrightarrow ۲x+۱ = ۷ \Longrightarrow x = ۲$.

ط. $۳^۶ = ۳^{۲x+۱}$ پس $۶ = ۲x+۱$. اما این معادله در اعداد طبیعی جواب ندارد و درنتیجه معادلهٔ $۹^x \times ۳ = ۹^۳$ نیز در اعداد طبیعی جواب ندارد. ■

تمرین:

(۵۲) بدون محاسبه، حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ساده اما مهم.
جهت خوانندگان مبتدی

آ. $۲۹۸^{۵۴۵} \times ۲۹۸^{۴۲۶}$ ب. $۱۵۶^{۴۵} \times ۲^{۴۵}$ ج. $۱۲^۷ \times ۵^۷$

د. $(۴۷^۳)^{۱۵}$ ه. $(۴^۷ \times ۴^۸)^۵$ و. $(۳^۶ \times ۴^۶)^۷$

ز. $(۳^۸ \times ۳^۵)^۹$ ح. $\left(\frac{۲^۴}{۲^۵}\right)^۶$ ط. $\left(\frac{۳^۶}{۳^۵}\right)^۷$

(۵۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

دقت کنید!

آ. $۳^۴ + ۳^۵ = ۳^۹$ ب. $۲^۶ + ۲^۷ = ۲^{۱۳}$ ج. $۳^{۹۵} \times ۳^۵ = ۳^{۱۰۰}$

د. $۲^۷ \times ۳^۷ = ۶^۷$ ه. $۲^۶ + ۳^۶ = ۵^۶$

(۵۴) درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

مهم!
قدرت حل مسئله‌تان را افزایش دهید.

آ. $۳^۴ + ۳^۵ = ۴ \times ۳^۴$ ب. $۴^۶ + ۴^۵ = ۵ \times ۴^۵$ ج. $۲^۳ + ۲^۵ = ۵ \times ۲^۳$

(۵۵) عبارت‌های زیر را ساده کنید.

جهت خوانندگان مبتدی

آ. $\frac{۳^۴ + ۳^۵}{۴}$ ب. $\frac{۴^۳ \times ۴^۸}{۴^۵}$ ج. $\frac{۵^۷ \times ۵^۹}{۵^{۱۲}}$

(۵۶) درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

نحوهٔ استفاد از قضایا و تعاریف مهم است.
قدرت حل مسئله خود را افزایش دهید.

آ. $۳^۷ < ۴^۷$ ب. $۳^۵ < ۳^۶$

ج. $۳^۶ < ۴^۷$ د. $۳^۵ + ۴^۷ > ۲^۴ + ۳^۶$

ه. $۴ \times ۳^۵ + ۵ \times ۴^۷ > ۳^۶ + ۴^۸$

(۵۷) عدد طبیعی x را چنان بیابید که:

فقط به پاسخ نیاندیشید.
به دنبال تکنیک‌های حل مسئله و روش‌های جدید استدلال باشید.

آ. $x + ۶ = ۵ + ۶$ ب. $x^۳ = ۵^۳$ ج. $۳^x = ۳^۵$

د. $۵^{۲x} = ۵^{۱۲}$ ه. $۲۵^x = ۵^{۱۸}$ (توجه: $۲۵ = ۵^۲$)

و. $۲^۷ \times ۲^{۴x+۴} = ۸^{x+۳}$ (توجه: $۸ = ۲^۳$)

ز. $۱۶^{x+۳} = ۸^{x+۵} \times ۴$ (توجه: $۱۶ = ۲^۴$)

(۵۸) نامعادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید.

ساده اما پایه‌ای.

آ. $x^۳ < ۵^۳$ ب. $x^۴ \leq ۱$ ج. $x^{۱۰} \leq ۱$ د. $x^{۱۲} \leq ۲^{۱۲}$

(۵۹) درستی یا نادرستی نتیجه‌گیری‌های زیر را با فرض اینکه a عددی طبیعی است بررسی کنید.

آ. $(x+۳) \times ۳ = ۳^۲ \Longrightarrow x = ۰$ ب. $(x+a)a = a^۲ \Longrightarrow x = ۰$

(۶۰) عبارات زیر را با استقرا ثابت کنید.

نتایجی شگفت‌انگیز از استقرای ریاضی

آ. $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ب. $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲$

ج. $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

د. $n^{۲} - (n-۱)^{۲} + (n-۲)^{۲} - \cdots \pm ۱^{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ه. $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \cdots + n(n+۱) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

و. $۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \cdots + n^{۲} = \frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}$

ز. $۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \cdots + \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲}$

(۶۱) شخصی ادعا می‌کند «همه اعداد طبیعی با هم برابرند» و می‌گوید:
اگر جملهٔ «همهٔ اعداد طبیعی از صفر تا n برابرند» را با $\mathrm{P}(n)$ نشان دهیم. در این صورت $\mathrm{P}(۰)$ واضح است و با فرض $\mathrm{P}(n)$ داریم:

$$۰ = ۱ = \cdots = n \Longrightarrow ۰ + ۱ = ۱ + ۱ = \cdots = n + ۱ \Longrightarrow ۱ = ۲ = \cdots = n + ۱$$

و از تساوی $n = \cdots = ۱ = ۰$ که همان $\mathrm{P}(n)$ است نتیجه می‌گیرد

$$۰ = ۱ = ۲ = \cdots = n = n + ۱$$

که همان $\mathrm{P}(n+۱)$ است. پس بنا به استقرا، همه اعداد طبیعی با هم برابرند.
اِشکال استدلال این شخص را بیابید.

کافی است جملات زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(۰) & \Longrightarrow & \mathrm{P}(۱) \\ \mathrm{P}(۱) & \Longrightarrow & \mathrm{P}(۲) \\ \mathrm{P}(۲) & \Longrightarrow & \mathrm{P}(۳) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

(۶۲) برای هر عدد طبیعی مانند n تعریف می‌کنیم: $۰! = ۱$ و $(n+۱)! = (n+۱)n!$
و $n!$ را «n فاکتوریل» می‌خوانیم. نشان دهید:

آ. $۰! = ۱$ ب. $۱! = ۱$ ج. $۲! = ۲ \times ۱$

د. $۳! = ۳ \times ۲ \times ۱$ ه. $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ و. $۹! = ۹ \times \cdots \times ۲ \times ۱$

(۶۳) نشان دهید:

آ. $\frac{۵!}{۳!} = ۵ \times ۴$ ب. $\frac{۷!}{۴!} = ۷ \times ۶ \times ۵$ ج. $\frac{۱۰!}{۶!} = ۱۰ \times \cdots \times (۶+۱)$

د. برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $m < n$ داریم: $\frac{n!}{m!} = n \times (n-۱) \times \cdots \times (m+۱)$

(۶۴) درستی یا نادرستی عبارات زیرا را بررسی کنید.

آ. $(mn)! = (m!)(n!)$ ب. $(m+n)! = m! + n!$

(۶۵) با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید:

آ. $n \geq ۴ \Longrightarrow n! \geq n^{۲}$ ب. $n \geq ۶ \Longrightarrow n! \geq n^{۳}$

ج. $۱(۱!) + ۲(۲!) + ۳(۳!) + \cdots + n(n!) = (n+۱)! - ۱$

د. $۲ \times ۶ \times ۱۰ \times (۴n-۲) = \frac{(۲n)!}{n!}$

ه. $۲^{n}(n!)^{۲} \leq (۲n)!$

(۶۶) برای هر دو عدد طبیعی m و n که $m \leq n$ قرار می دهیم: $\mathrm{C}(m,n) = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$
مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ. $\mathrm{C}(۰,۰)$ ب. $\mathrm{C}(۱,۰)$ ج. $\mathrm{C}(۱,۱)$ د. $\mathrm{C}(۲,۰)$

ه. $\mathrm{C}(۲,۱)$ و. $\mathrm{C}(۲,۲)$ ز. $\mathrm{C}(۳,۰)$ ح. $\mathrm{C}(۳,۱)$

ط. $\mathrm{C}(۳,۲)$ ی. $\mathrm{C}(۳,۳)$ ک. $\mathrm{C}(۴,۰)$ ل. $\mathrm{C}(۴,۱)$

م. $\mathrm{C}(۴,۲)$ ن. $\mathrm{C}(۴,۳)$ س. $\mathrm{C}(۴,۴)$

(۶۷) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند m و n که $m < n$ داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,۰) = ۱$ ب. $\mathrm{C}(n,n) = ۱$ ج. $\mathrm{C}(n,۱) = n$

د. $\mathrm{C}(n,n-۱) = n$ ه. $\mathrm{C}(n,۲) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و. $\mathrm{C}(n,۲) = \mathrm{C}(n,n-۲)$

(۶۸) نشان دهید برای هر عدد طبیعی مانند n داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k)=\dfrac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{k!}$

ب. $\mathrm{C}(n,k)=\dfrac{n(n-۱)\cdots(k+۱)}{(n-k)!}$

(۶۹) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند n و k که $۱<k<n$ داریم:

$$\mathrm{C}(n-۱,k-۱)+\mathrm{C}(n-۱,k)=\mathrm{C}(n,k)$$

(۷۰) نشان دهید برای هر دو عدد طبیعی مانند k و n داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k)=\mathrm{C}(n-۱,k-۱)+\mathrm{C}(n-۲,k-۱)+\cdots+\mathrm{C}(k-۱,k-۱)$

ب. $\mathrm{C}(k,k)+\mathrm{C}(k+۱,k)+\cdots+\mathrm{C}(n,k)=\mathrm{C}(n+۱,k+۱)$

(۷۱) نشان دهید برای اعداد طبیعی مانند n، k و r داریم:

آ. $\mathrm{C}(n,k)\mathrm{C}(k,r)=\mathrm{C}(n,r)\mathrm{C}(n-r,k-r)$

ب. $\mathrm{C}(n,k)=\mathrm{C}(n-۲,k-۲)+۲\mathrm{C}(n-۲,k-۱)+\mathrm{C}(n-۲,k)$

ج. $\mathrm{C}(n,۰)+\mathrm{C}(n,۱)+\cdots+\mathrm{C}(n,n)=۲^n$

د. $\mathrm{C}(n,۱)+۲\mathrm{C}(n,۲)+۳\mathrm{C}(n,۳)+\cdots+n\mathrm{C}(n,n)=n۲^{n-۱}$